カオス入門

現象の解析と数理

長島弘幸・馬場良和 共著

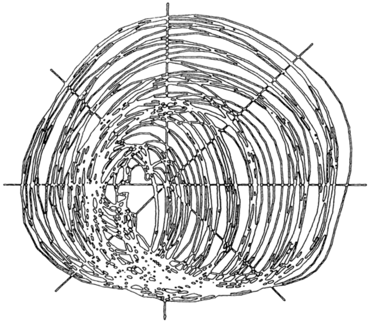


培風館

カオス入門

現象の解析と数理

長島弘幸・馬場良和 共著



培風館

序　　文

本書は，カオスの入門書としてまとめたものである。読者としては理工系学部学生を想定しているが，大学院生や，数学，物理をはじめとする多くの分野の研究者にも，かなり気軽に読んでいただくことも意図している。

本書の内容は，カオスについて全般的に説明するのではなく，対象を一次元写像と典型的な微分方程式に限り，数理的内容の初歩を楽しみながらカオスを理解していく行き方をとった。入門書であることを考え，図版もできるだけ多く掲載した。

数学と物理という分野を異にする筆者らの共著であり，2章を中心とした部分を馬場が，他の部分を長島が執筆した。しかし，単にそれぞれ並列的に書いたわけではなく，相互に全体の内容を検討し議論を行いながらまとめた。その意味での両者の共同作業は全体に及んでいる。また執筆の過程で，分野の違いからくる発想や表現の違いを調整したり，内容の検討も何度となく行なった。さらに，途中で出合った問題に取り組んだり，一次元写像に関するささやかではあるが新たな発見もあった。この“楽しみ”の帰結は，そのまま遅筆となって現われ，培風館の村山高志氏には大変御迷惑をおかけした。

本書中の図版は，主としてワークステーションにより作製した。なお，一部の図は，かつて著者の一人(長島)の研究室で卒業研究を行った大場誠君，伊藤一世君，加山浩君の労作によるものである。また，本書中の二重振り子は技官の増田健二氏の製作によるものである。静岡大学理学部数学科の浅井哲也教授には，数論的部分に関する御教示をいただき，大変参考になった。また，培風館の岩田誠司氏には，読みずらい原稿内容を適切に

要領よく整えていただいた。さらに，静岡大学教養部自然系の皆さんには暖かい励ましをいただいた。以上の方々に深く感謝致します。

1992年7月

長島弘幸
馬場良和

目　　次

1章

カオスとは何か

カオスについて述べるにはカオスという語の意味なり，その定義なりをまず述べなければならない。それらを辞書的に示すよりは，具体的な例を挙げる中で順次説明してゆく。

1.1　カオスとは何か

カオスとは英語の chaos〔keias〕よりきた語で，日本語では通常“混沌”と訳される。この語感からすれば，あたりかまわず大混乱ということで，コスモスすなわち秩序に対して大きく乱れた状態を思い浮かべるであろう。しかし，これから述べるカオスとは乱れた状態には違いはないが，そう大きく乱れた状態ではなく，感覚的に言えばむしろ中程度の乱れ方，それも時間とともに不規則的に変化する現象を指す。そしてさらに言えば

比較的簡単な規則に支配された不規則振動

を指すのである。ここで振動といっているのは，ある量が変動することであると思っていただきたい。

さて読者の中には，まず始めに，いったい簡単な規則に支配された不規則振動などというものがはたしてあるだろうか，と疑問をもたれることであろう。そこで，まずは論より証拠，図 1-1 を見ていただきたい。これは一見してわかるとおり，不規則に値をとる数列 $\{x_n\}$ の n に対するグラ

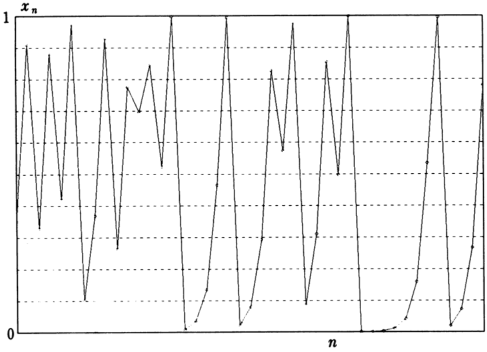


図 1-1　ある不規則数列

フを描いたものである。ところでいったい，この不規則数列のどこに規則性が隠されているのであろうか？　この規則性を次のように‘発見’してみよう。

まず手始めに，この数列の第 $n+1$ 項 x_{n+1} が，第 n 項 x_n の値のみによって定まると仮定してみる。これを式で書けば，

$$x_{n+1}=f(x_n) \tag{1-1}$$

となる。この具体的関係を視覚化するために，平面上の直交座標(デカルト座標)の横軸に x_n の値を，縦軸に x_{n+1} の値をとる。すなわち，(x_n, x_{n+1}) の点を $n=1,2,3,\cdots$ と順次プロットすると，図 1-2 に示すような上に凸の放物線が浮び上ってくる。この関係を x_n から x_{n+1} への**写像**(map)という。この場合の写像は，

$$x_{n+1}=L(x_n)=4x_n(1-x_n) \tag{1-2}$$

で表わされる。すなわち(1-1)において，$f(x)=4x(1-x)$ となる。(1-1)のように，x_{n+1} の値が x_n の値のみによって定まる関係を伝統的に**1 次元写像**とよぶ。(1-2)に示した写像には，**ロジスティック**(logistic)**写像**という名前がついている。このように簡単な規則によって生成された数列が，一見不規則的にみえるということは驚くべきことである。この数列が不規則的であるというのは，図 1-1 に示した範囲の n よりも，もっと大きな n までの数列を生成してみるとよくわかる。数列の値は $[0,1]$ 区間の間のほぼあらゆる値をとるように振舞うのである。このように簡単な規則(1-

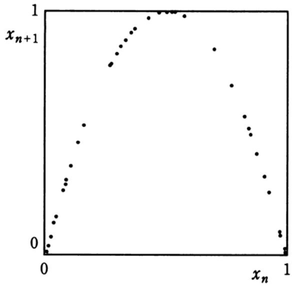


図 1-2　図 1-1 の数列の(x_n, x_{n+1})プロット$(n=1, 2, 3, \cdots)$
ロジスティック写像に従う.

2)に支配されながらも不規則的に振舞うことが，カオスの現象的特徴である。

このような不規則数列を生じさせる簡単な規則は，(1-2)以外にも無数に存在するが，その中でも代表的な写像を以下に二つ示しておく：

$$x_{n+1}=T(x_n)=\begin{cases}2x_n & (0\leqq x_n\leqq 0.5)\\ 2-2x_n & (0.5<x_n\leqq 1)\end{cases} \tag{1-3}$$

$$=1-|1-2x_n|$$

$$x_{n+1}=B(x_n)=\begin{cases}2x_n & (0\leqq x_n\leqq 0.5)\\ 2x_n-1 & (0.5<x_n\leqq 1)\end{cases} \tag{1-4}$$

以上，(1-2), (1-3), (1-4)における x_n の範囲は区間 $[0, 1]$ とする。

これらは各々，**テント写像**(1-3)，**2 進変換**または**ベルヌーイシフト**(Bernoulli shift) (1-4)とよばれる。これらの写像のグラフを，図 1-3，図 1-4 に示す。

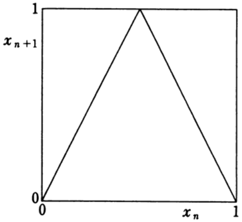


図 1-3　テント写像

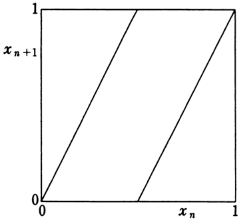


図 1-4　2 進変換またはベルヌーイシフト

問 1 図 1-5～図 1-7 に示した不規則数列を生ずる 1 次元写像は,(1-2)～(1-4)のどれであるか。(x_n, x_{n+1})のプロットを行い判定せよ。

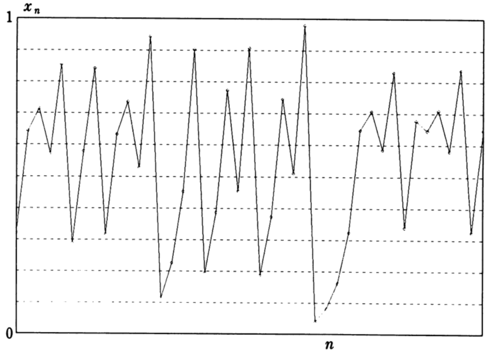


図 1-5

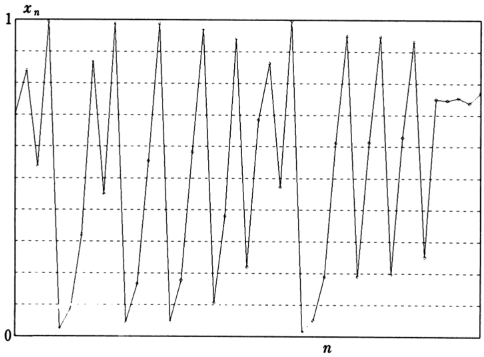


図 1-6

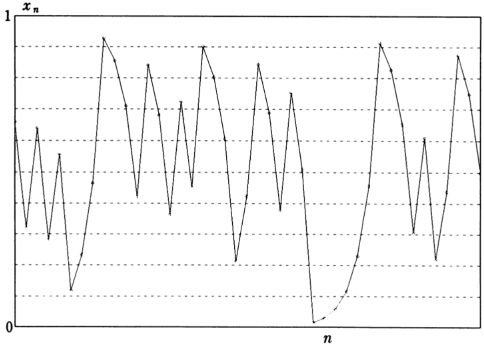


図 1-7

これらの簡単な写像が不規則数列を生成することはたいへん不思議なことであるが，これを実感として味わっていただくために，ポケットコンピューターなどを使い，次の BASIC プログラムによって実際に不規則数列を作ってみるとよい。

```
10 INPUT "X=";X
20 FOR I=0 TO 50
30 PRINT X                                   (1-5)
40 X=4*X*(1-X)
50 NEXT I
```

上のインプットの X の値として，区間 $[0,1]$ のある値を入れる。この値がよほど特殊な値† でないかぎり，数列 $\{x_n\}$ は不規則となる。

この BASIC プログラムよりも直接的な方法に，グラフを利用する方法がある。図 1-8 を参照し，数列の求め方を理解されたい。

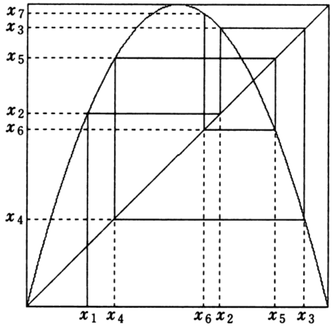


図 1-8　$x_{n+1}=L(x_n)=4x_n(1-x_n)$ のグラフによる数列 $\{x_n\}$ の求め方。初期値 x_1 を設定し，これより逐次 $x_2, x_3, \cdots$ を求めてゆくが，図のように，$x_{n+1}=L(x_n)$ と $x_{n+1}=x_n$ のグラフを交互に利用することにより，容易に数列が求まってゆくことがわかる。

---

† 特殊な値とは，周期的数列を与える初期値であり，これは区間 $[0,1]$ に無限個(可算)存在する。幸いにも(1-2)のロジステック写像では，これらの値は無理数となる(付録 1A 参照)。

1.2 カオスの特徴

さて，このような不規則な振舞いを生じさせる写像(1-2)～(1-4)はどのような特徴をもっているのであろうか。図 1-2～図 1-4 を見て，ただちにわかることは，x_n に対する x_{n+1} のグラフが折り畳んでいるか，二重になっていること，別の言いかたをすれば，ある x_{n+1} を与える x_n が二つ存在することである。このことは，必然的にグラフの平均的な勾配が急であることとなる。また勾配が急なことは，きわめて接近した二つの初期項より出発した数列の値が互いに急に離れてゆくことを意味している(図 1-9 参照)。このことを具体的にみてみよう。(1-5)に示した BASIC プログラムに従って，初期値 $x_0=0.35$ と $x_0'=0.350001$ を選び，二つの数列を比較すると，図 1-10 のように互いに急に離れてゆくことがわかる。このように初期値がほんの少し異なると，結果が大きく異なるというのがカオス現象の特徴である。すなわち，結果の**初期値敏感性**である。

ところで，どの程度初期値に対して結果が敏感に影響されるかをみるには，(1-2)のロジスティック写像よりも，傾きの絶対値が場所によらず 2 である(1-3)や(1-4)のほうが話が簡単である。二つの初期値を x_0，および $x_0'=x_0+\Delta x$ とすると，この Δx の違いが，互いに 1 回の写像の後には，$f'(x_0)\Delta x=2\Delta x$ となり，かりに $\Delta x=10^{-5}$ としても，15 回の写像の後には，$\Delta x\times 2^{15}=10^{-5}\times 2^{15}=0.33$ となる。そして，(1-3)，(1-4)において，このように互いの距離が 0.5 に近くなると，双方の点が $x_n=0.5$ の点の両側に位置する可能性が大きくなる。両側に位置した場合には，相互の距離はもはや 2 倍とはならずに，そしてそれ以後は，これらの二点は初期に

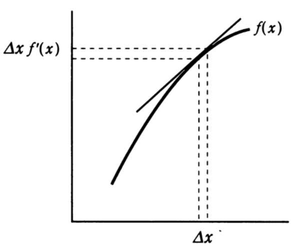


図 1-9　Δx の幅の区間の拡大

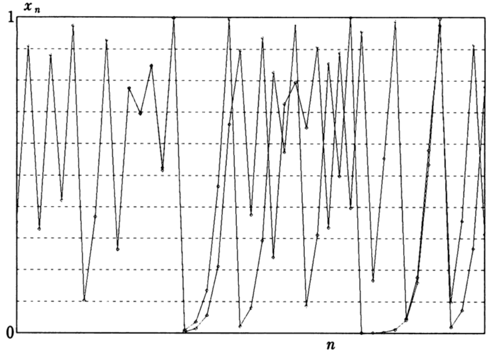


図 1-10 二つのきわめて接近した初期値 $x_0=0.35$, $x_0'=0.350001$ による数列

近かったことと無関係に，別々の振舞いをするようになるであろう。このことを初期の二点を端点とする区間 $[x_0, x_0']$ の全体の点で考えると，最初のうちはこの区間が2倍の長さに拡大されてゆくが，やがて折り曲げられ，区間が重なってゆくということである。この**引き延ばし**と**折り畳み**の操作は，カオスを生ずる写像の最も基本的な性質である。

ここで，引き延ばしと折り畳みの操作に親しみをもっていただくために，パイこね変換について述べよう。これはパイを作る時の材料をこねる操作と同じなのでこの名がついている。この変換は2次元図形の写像であり，図1-11のように区間を横に引き延ばし，二等分して，はみ出したところを切り，上に重ねる†。この操作を繰り返してゆくと，図の中で丸で示した部分も全体に広がり，横方向の分布は均一となってゆく。すなわち横方向の変化だけに着目すると，ちょうど(1-4)の変換となっている。

問 2 同様に横方向の変換が(1-3)で与えられる2次元の写像は，どのようなものか，図で示せ。

† この操作 φ を式で表わすと

$$\varphi(x, y)=\begin{cases}\left(2x, \dfrac{1}{2}y\right) & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)\\[2mm] \left(2x-1, \dfrac{1}{2}(y+1)\right) & \left(\dfrac{1}{2}<x\leqq 1\right)\end{cases}$$

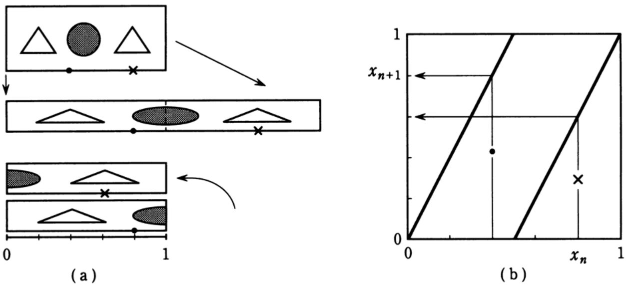


図 1-11 パイこね変換(a)と，2進変換(b)との関係。パイこね変換の操作を繰り返すと，最初の丸の部分が横方向に広がってゆくことがわかる。

パイこね変換を考えると，最初は一部に存在するパイの材料の成分が全体に広がってゆくことがわかるし，材料どうしが互いに交り合うことも直感的に理解できよう(ただしこれは横方向にのみであり，縦方向には交り合わず，層状に積み重なった構造がある。したがって，丹念に逆操作をほどこせば，元に戻すことができる)。写像(1-2)～(1-4)においても，区間 $[0,1]$ 内の周期点以外の点を初項として作った数列 $\{x_i\}$ は，この区間内のほぼ全体にわたる値を取るのである。これらのことは3章において詳しく述べるが，ここではロジスティック写像，テント写像によって生ずる不規則数列の値の分布を図1-12，図1-13に示しておく。これらの分布に見られるように数列は区間 $[0,1]$ の全体に分布している。

なお，初期値敏感性は，先に述べた写像により作られる数列 $\{x_i\}$ の不規則性を示唆するものである。なぜならば，数列の i 番目の値 x_i に着目すると，i より大きな j において，x_j は x_i にきわめて近くなる場合もあるであろう。ところが正確に $x_i=x_j$ とならないかぎり，初期値敏感性により，数列の部分 $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots$ は，$x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots$ と少し後の部分では互いにまったく異なるであろうからである。

問 3　ポケットコンピューターにより，(1-5)のプログラムを実行するものとする。ポケットコンピューターの計算の精度が10桁とすれば，計算誤差が1の大きさの程度に拡大されるのは第何桁目か。

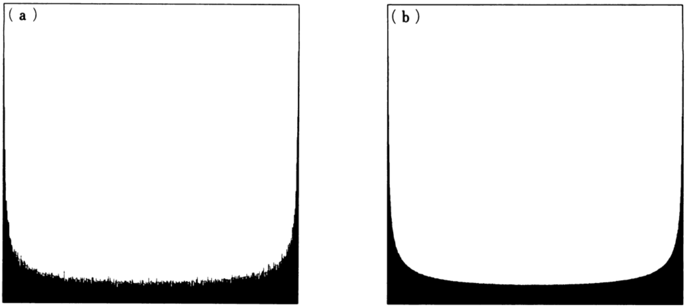


図 1-12　ロジスティック写像の数列の値の分布。(a) 10^5 回の繰り返し。区間は 1000 に分割してある。(b) 10^7 回の繰り返し。

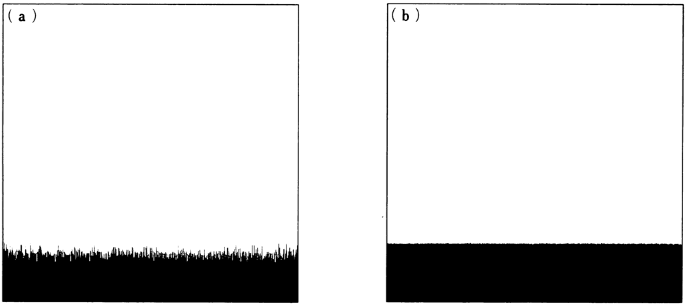


図 1-13　テント写像による数列の値の区間 $[0,1]$ 内の分布。(a) 10^5 回の繰り返し。区間は 1000 に分割してあるので，ばらつきは $1\Big/\sqrt{\frac{10^5}{10^3}}=0.1$ 位となる。(b) 10^7 回の繰り返し。ばらつきは 0.01 位となる。

カオスは計算誤差の影響を非常に受けやすい。計算誤差はこの場合，計算機の精度で定まり，これは無限の精度の計算過程に，例えば小数点以下 10 桁目に乱れが加わったことに等しい。カオスはこのような微小の乱れの影響を敏感に受ける。このことは自然現象として存在するカオスには大きな意味をもつ。すなわち，自然界にはいつも乱れが存在するからである。この(カオス＋小さな乱れ)の系は，本来は決定論的に定まるカオス

を，実質的には非決定論的存在としてしまうのである。すなわち乱れのないカオス系では，原理的に初期値と写像が与えられれば，どんな先の値もきちんと決定できるのであるが，少しでも乱れがあると，カオスの初期値敏感性により，数列の値は区間としての存在範囲(例えば，[0,1])か，せいぜい，その区間内での存在確率しかわからなくなってしまうのである。これがカオスの重要な現実的側面である。

さて，本章で述べたカオスの定義“簡単な規則による不規則的振動”は直感に訴えるものとしてはよいが，もう少しきちんと定義をする必要があるであろう。それは‘不規則’というものがどのようなものであるかということである。上述した写像による数列もそうであるし，次々と出るサイコロの目のようなものであり，コイン投げにおける表裏の出方のようなものでもある。

カオスを生ずるのは，もちろん1次元写像ばかりではなく，より複雑な写像や，微分方程式系からも生ずる。また現実の事象からもカオスが観測されている。この現実にカオスが存在することがカオスを単に数学や計算機物理学の対象ばかりではなく，多くの分野の実験・観測の対象としているのである。

1.3 自然界のカオス

最後に，ここに述べてきた1次元写像と，現実に存在するカオスとの関係について示し，またカオスの意義についても述べておきたい。

1次元写像はいかにも簡単すぎて，現実に存在するカオスとは，かけ離れているようにも考えられるが，実はそうではなく，実験や観測で得られた不規則振動の中から出てくる場合がかなりあるのである。その例を示そう。

図1-14に示したような不規則振動が観測されたとする。この観測データは，振動的化学反応の**ベルーソフ・ジャボチンスキー**(Belousov-Zhabotinsky)**反応**[†]の信号を基としている。この波形よりカオス的規則性を抽出するいちばん手っとり早い方法は，振動の極大値(あるいは極小値)

† B. Z. Belousovが発見し，A. M. Zhabotinskyが発展させた振動的化学反応。マロン酸($CH_2(COOH)_2$)の酸化によりブロムマロン酸($BrCH(COOH)_2$)が生ずる過程で，イオン濃度(Br^-やCe^{3+}等)の長時間の振動現象，および拡散を伴った空間的なパターンが形成される。

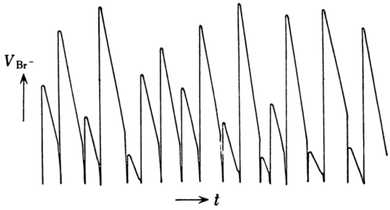


図 1-14 ベルーソフ・ジャボチンスキー反応における臭素イオン濃度に関する不規則振動(模式図)

を $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ のようにとり，次に，この数列の引き続く二つの値 (A_i, A_{i+1}) $(i=1, 2, 3, \cdots)$ を平面上にプロットしてゆくと，図 1-15 のような一価の写像が浮び上ってくることがわかる。この関係を $A_{n+1}=f(A_n)$ で表わすと，図 1-14 の不規則波形のピーク値が，このような 1 次元写像に支配される簡単な規則に従っていることがわかる(もちろんいつでもこのように不規則振動を整理したからといって，このように 1 次元写像が得られるわけでもなく，むしろ‘運が良ければ’と言っておいたほうが良いであろうが)。

このようなデータ処理法によりなぜ，1 次元写像が得られたのであろうか。それは現実の系が，**奇妙なアトラクタ**，または**ストレンジアトラクタ** (strange attractor) というところに落込んでいることによるものである。このアトラクタに関しては 4 章において述べる。

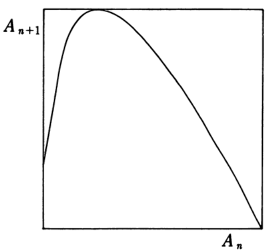


図 1-15 図 1-14 の極大値 A_n の (A_n, A_{n+1}) プロット $(n=1, 2, 3, \cdots)$ より推定される曲線

このように現実の振動系からも1次元写像は登場し，1次元写像は基本的であるのと同時に実用的なのである。

さてこのカオスは，今までの力学観や自然観の中でどのような意義を有するのであろうか。その一つとしては力学ないしはもう少し広く自然に対する考え方の拡張である。大学の物理で習う力学(古典力学)では，カオスのような複雑な挙動を示すものはない。例えば，落下運動，単振り子の運動，惑星の運動等どれ一つをとってみても解の振舞いが単純なものばかりである。このことは，これらの力学系が数学的に積分可能であり，解が素直な振舞いをするということである。そしてこのような例が実は，決定論としての力学一般が同様に素直な振舞いを示すのではなかろうか，という錯覚を生じさせているのではないであろうか。カオスはこのような力学観に対する反例なのであり，また，従来複雑な挙動を示す系は多体系であり，系自身が複雑なものであるはずであるという考えに反省を強いているのである。複雑な挙動を示す比較的簡単な例としては，図1-16に示す二重振り子がある。これは4章において述べる保存系の例であり，本書で主として取り上げるアトラクタ上のカオスとは異なるが身近な例である。さらに，カオスの意義としての別のものは，前述した(カオス＋小さな乱れ)の系が，カオス自身が有する軌道の不安定をとおして，結局その系の未来を予測不可能なものにしてしまうということである。この**予測不可能性**は，認識論の問題としてよく登場する量子力学の不確定性原理のように，ミクロな世界のものでなく，マクロな古典力学が通用する系のものであ

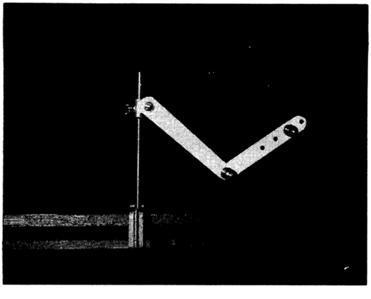


図 1-16　二重振り子のカオス的運動(付録4C参照)

り，実質的な重要性は大きいと考えられる。

現実の系におけるカオスの存在がクローズアップされてきたのはきわめて最近のことであり，現在ではまだ新しい存在である。すなわち，カオスはいまだ珍らしい存在の域を出ない面があるが，やがては規則的な振動と同様にあたりまえのものとして扱われ，自然観の中で適切な位置付けがなされてゆくであろう。

本章で紹介した1次元写像によるカオスは，いかにもオモチャ的なもののように思えるが，カオスの基本である。以下の2章，3章では1次元写像に関係したカオスの性質や，その判定条件について述べる。カオスの判定は，数列や振動状態の不規則さではなく，通常以下のように行う。

(1) リ(Li)とヨーク(Yorke)によって与えられた「写像が3周期点を有すればカオスである」というものであり，(2) それと関係した「位相的エントロピーが正」という条件で，(3)「写像拡大率の対数であるリアプノフ(Lyapunov)数が正」という条件を用いて判定する。記述はやや数学的になるが，順を追って読めば困難なく理解できるように書いてある。

2章

リ・ヨークのカオス，位相的エントロピー，リアプノフ数

本章ではカオスの判定条件について述べる。1次元写像に非周期軌道が存在するかどうかの判定条件を与えるものとして，歴史的なリ・ヨークの定理がある。またカオス写像の有する折り畳み，引き延ばしの性質から判定するものとして，実際上重要な位相的エントロピーやリアプノフ数がある。

2.1 リ・ヨークの定理とシャルコフスキーの定理

2.1.1 リ・ヨークの定理

1975年に出た，リ・ヨーク(Li-Yorke)の論文“周期3はカオスをもたらす(Period Three Implies Chaos)”は，カオス研究に衝撃を与えた。その定理の前半は，

“区間 $[a, b]$ 上の連続関数 f が $a \leqq f(x) \leqq b$ であり，周期3をもてば，f はすべての周期をもつ”

というものである。

ここで，f が**周期3をもつ**とは，$c, f(c), f^2(c)\,(=f(f(c)))$ がすべて異なり，$f^3(c)\,(=f(f^2(c)))=c$ となるような点 c（そのような c を**3周期点**という）が存在することである(図2-1)。また，一般に f が**周期 k をもつ**とは，ある点 c を出発した f の軌道 $\{c, f(c), f^2(c), \cdots, f^{k-1}(c), \cdots\}$ が k 回目で初めて c に戻ることである。すなわち，$c, f(c), f^2(c),$

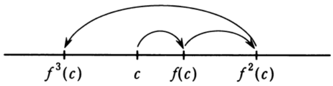


図 2-1 関数(写像)$f(x)$によって,点 c が $f(c), f^2(c), f^3(c)$に移される。ここでは,$f^3(c)<c$ となっていて,c は3周期点ではないが,リ・ヨークの定理の条件は実際には"$f^3(c) \leqq c < f(c) < f^2(c)$,または,その順序がすべて逆の不等式を満たす c が存在する"である。

$\cdots, f^{k-1}(c)$がすべて異なり,$f^k(c)\,(=f(f^{k-1}(c)))=c$ となるような k 周期点 c が存在することである。なお,$f^0(c)=c$ と約束する。特に $c=f(c)$のときには,c から出た軌道はずっと c にとどまるので,c を f の**不動点**という。このとき c は,$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x$ との交点の x 座標である(図2-2)。同様に k 周期点は,$y=f^k(x)$ と $y=x$ との交点であるが,それらの内には k より小さい周期の周期点もある。例えば,$f^6(x)=x$ となる x の内には,3周期点が入っている。なぜなら,$f^3(x)=x$ を満たす x については,$f^6(x)=f^3(f^3(x))=f^3(x)=x$ となるからである(図2-3)。一般に,$f^p(x)=x$ ならば $f^{pq}(x)=x$ となるので,p が n の約数のとき,方程式 $f^n(x)=x$ の解の内には $f^p(x)=x$ の解が入り込む。

$f(x_0)=x_1$,$f(x_1)=x_2$,$\cdots, f(x_{n-1})=x_n$ $(n \geqq 3)$ と書くことにすると,

$$f^{n+m}(x_0)=f^n(f^m(x_0))=f^m(f^n(x_0))=x_{n+m}$$

が成り立つことを注意しておこう。

さて,リ・ヨークの定理は,f が周期3をもつという条件だけから,f がすべての周期をもつということが必然的に出てくるというのであるから,まことに驚くべき定理と言わなければならない。

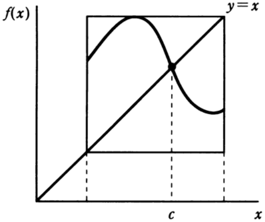


図 2-2 写像の不動点 $f(c)=c$

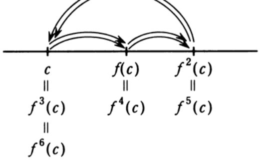


図 2-3 このような軌道は周期3といい,周期6とはいわない。

以下では，区間 $I(=[a,b])$ 上の関数 f で，その値 $f(x)$ も同じ区間 I に属するものを，関数よりは一般的な用語である**写像**(あるいは**変換**)を用いて，“f は I から I への写像である”といういい方をすることにしよう。それは，I の点を f によって次々に移してゆくというイメージがあるからである。また，数列 $\{c, f(c), f^2(c), \cdots, f^n(c), \cdots\}$ を，c を**初期値**とする写像 f の**軌道**(特に c が f の k 周期点のときには，**k 周期軌道**)という。ただし，周期軌道には，その数列の初めの何個かに周期軌道の外にある点が含まれていてもよい。例えば，(1-3)のテント写像

$$T(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\leqq x<\dfrac{1}{2}\right) \\ 2-2x & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right) \end{cases}$$

の場合，$\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{10}$ を初期値とする軌道は $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \cdots\right\}$，$\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \cdots\right\}$ のように，それぞれ1周期軌道，2周期軌道となる。ただし，ここでの始めの $\frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}$ は周期点ではない。このような点は，**究極的には周期的**(eventually periodic)な点とよばれる。

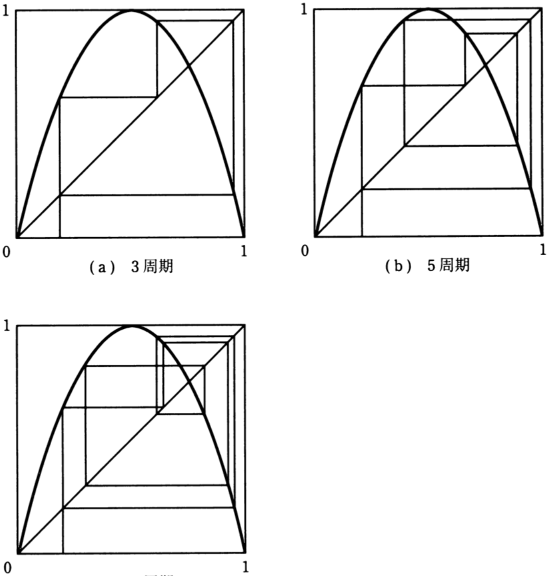
2.1.2　シャルコフスキーの定理

リ・ヨークの定理によれば，写像 f が3周期軌道をもてば，それはすべての周期の周期軌道をもつ，というのであるが，実はそれ以前の1964年にシャルコフスキー(A. N. Sharkovski)がより詳しい定理を発表していたのである。ロシア語で書かれ，ウクライナの数学雑誌に載った彼の論文は，西側諸国の数学者の眼にふれなかったのである。

区間 I から I への連続関数による写像(連続写像) f が，n 周期点をもてば必然的に m 周期点をもつようになっているときに $n \rightarrow m$ と書くことにする。そのとき，シャルコフスキーの定理は，

$$\begin{array}{l}
3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow 2n+1 \rightarrow \cdots \rightarrow \\
\rightarrow 2\cdot 3 \rightarrow 2\cdot 5 \rightarrow 2\cdot 7 \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow 2(2n+1) \rightarrow \cdots \rightarrow \\
\rightarrow 2^2\cdot 3 \rightarrow 2^2\cdot 5 \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow 2^2(2n+1) \rightarrow \cdots \rightarrow \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\rightarrow 2^m\cdot 3 \rightarrow 2^m\cdot 5 \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow 2^m(2n+1) \rightarrow \cdots \rightarrow \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\rightarrow \cdots \rightarrow 2^k \rightarrow 2^{k-1} \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1
\end{array}$$

を主張する(3周期があれば，5周期，7周期も存在することの説明が図2-4である)。ここにはすべての自然数が登場するので，ある意味での序列を自然数につけたものと考えることもできる。この序列を強弱とみれば，3が最強で，1以外の奇数は偶数よりも強く，2のべき乗と$1(=2^0)$が最も弱い数ということになる(この定理の証明を知りたい読者は，「カオス力学系入門」，R. L.デバネー著，後藤憲一訳，共立出版(1987)を参照されたい)。



(a) 3周期　(b) 5周期　(c) 7周期

図 2-4　3周期があれば，5周期，7周期も存在することの例

2.2 周期軌道

2.2.1 周期軌道の個数

ここでは具体的な写像として，$I=[0,1]$ から I への写像として1章にあげたテント写像 $T(x)$，ロジスティック写像

$$L(x)=4x(1-x),$$

2 進変換†

$$B(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\leqq x<\dfrac{1}{2}\right) \\ 2x-1 & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x<1\right) \end{cases}$$

について，それらの周期軌道とその個数について考察する。

$T(x)$の 1 周期点は $y=T(x)$ と $y=x$ のグラフの交点の x 座標 $0, \frac{2}{3}$ の 2 個，2 周期点は $y=T^2(x)$ と $y=x$ のグラフの交点の x 座標 $0, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ から 1 周期点の $0, \frac{2}{3}$ を除いた $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$ の 2 個，3 周期点は $y=T^3(x)$ と $y=x$ の交点から $0, \frac{2}{3}$ を除いた $\frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}$ の 6 個(図 2-5(a))，… であり，n 周期点は n 回写像 $y=T^n(x)$ と $y=x$ の交点の x 座標全体(2^n 個ある)から，n の約数になっている数 p に対する p 周期点をすべて取り去った残りである。その個数を n の関数とみて$A(n)$で表わせば，

$$A(n)=\sum_{p|n}\mu\left(\frac{n}{p}\right)2^p \tag{2-1}$$

となることがわかる。ここで記号 $p|n$ は，p が n の約数であることを示し，$\sum_{p|n}$ はそのような p についてのみ和をとることを示す。また，$\mu(x)$ は自然数全体に対して定義される関数で，メビウス(Möbius)関数とよばれ，±1，0 の三つの値しかとらない。2^p は $y=T^p(x)$ と $y=x$ の交点の個数であるが，詳しくは付録 2 A を参照されたい。

$A(n)$ の最初のいくつかは，

$$A(1)=A(2)=2, \quad A(3)=6, \quad A(4)=12, \quad A(5)=30, \quad \cdots$$

である。n が大きくなると，

$$A(10)=990, \quad A(20)=1\,047\,540, \quad A(50)=1\,125\,899\,873\,287\,200, \quad \cdots$$

となるが，

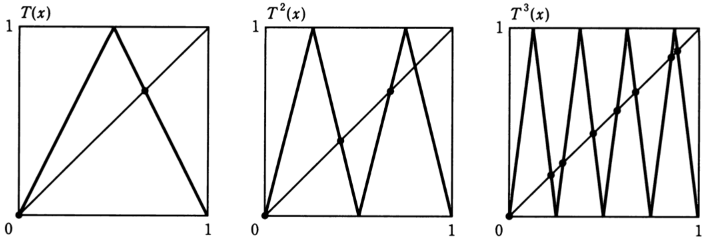
$$2^{10}=1024, \quad 2^{20}=1\,048\,576, \quad 2^{50}=1\,125\,899\,906\,842\,624, \quad \cdots$$

のように，$A(n)$ と 2^n の比は 1 に近くなる。

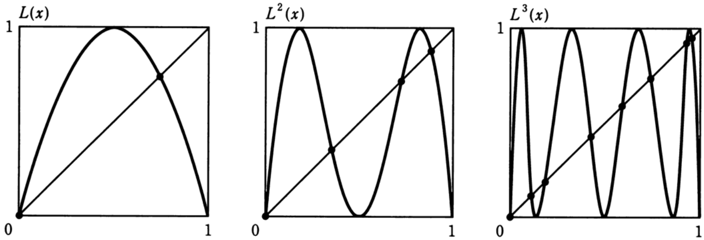
$A(n)$ の計算にあたっては，$y=T^n(x)$ と $y=x$ のグラフの交点の個数が 2^n であることしか使わないので，$y=x$ との交点の個数がまったく同じであるロジスティック写像 $L(x)$ の n 周期点の個数も $A(n)$ となる(図 2-5(b))。

---

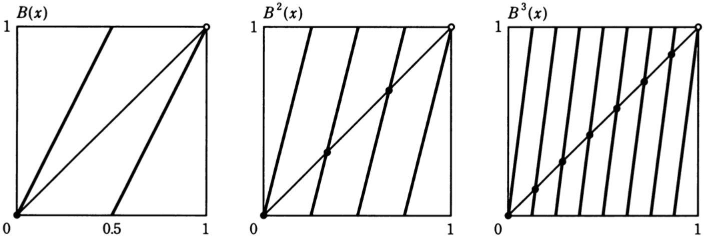
† 2 進変換は，数 x を 2 倍してその小数部分を取るというのが写像の本来の意味なので，1 章の定義域・値域を変更して，両者とも$[0,1)$とする。



(a) $T(x)$, $T^2(x)$, $T^3(x)$ のグラフと $y=x$ との交点



(b) $L(x)$, $L^2(x)$, $L^3(x)$ のグラフと $y=x$ との交点



(c) $B(x)$, $B^2(x)$, $B^3(x)$ のグラフと $y=x$ との交点

図 2-5

次に，2 進変換$B(x)$ の場合には，$0 \leqq x < 1$ で $B(x)$ が定義され，ここでは，$x=1$ が除いてあるので，2^n の代わりに 2^n-1 が $y=B^n(x)$ と $y=x$ の交点の個数になる(図 2-5(c))。しかし，このとき，$B(x)$ の n 周期点の個数は，$A(n)$ の場合と同様に

$$\sum_{p|n} \mu\left(\frac{n}{p}\right)(2^p-1) = \sum_{p|n} \mu\left(\frac{n}{p}\right) 2^p - \sum_{p|n} \mu\left(\frac{n}{p}\right)$$

となるが，一般に $n \geqq 2$ のとき，$\sum_{p|n} \mu\left(\frac{n}{p}\right) = 0$ なので，$n \geqq 2$ のときの結果は $T(x), L(x)$ と同じ値 $A(n)$ である。

問 1 写像 $T(x), L(x), B(x)$ の n 周期軌道の個数は $\dfrac{A(n)}{n}$ であることを示せ。

ところで 2 進変換 $B(x)$ は，x を 2 進小数

$$x = (0.x_1x_2\cdots x_n\cdots)_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{2^n} + \cdots \qquad (x_n = 0, 1)$$

で表わすと，その性質がより鮮明になる。10 進小数のときの，

$$0.1 = 0.099999\cdots, \qquad 0.12 = 0.1199999\cdots$$

などと同様に，有限 2 進小数は二通りの表現が可能である。以下では，例えば，

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = (0.11)_2 \quad (=(0.1011111\cdots)_2),$$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} = (0.101)_2 \quad (=(1.10011111\cdots)_2)$$

のような有限小数のときには，特に断らないかぎり有限小数にして，後に 0 を無限個付け加えた$(0.1100000\cdots)_2$や$(0.10100000\cdots)_2$を用いることにする。

10 進小数のときと同様，2 進小数についても以下のことが成り立つ。

（i） x が有限 2 進小数となるための必要十分条件は，x が $\dfrac{j}{2^k}$ $(j, k \geqq 0)$ の形の有理数であること(例えば，$\dfrac{3}{2^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2}$ のように)，である。

（ii） 区間$[0, 1]$の任意の数 x $\left(\neq \dfrac{k}{2^j}\right)$ は，無限 2 進小数でただ一通りに表わせる。その際，有理数は循環小数となり，無理数は循環しない無限小数になる。

さて，2 進変換 $B(x)$ の性質より，$x=(0.x_1x_2\cdots x_n\cdots)_2$ において，$x_1=0$ ならば，$x<\frac{1}{2}$ であるから，

$$B(x)=2x=2\left(\frac{x_2}{2^2}+\frac{x_3}{2^3}+\cdots+\frac{x_n}{2^n}+\cdots\right)$$
$$=\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2^2}+\cdots+\frac{x_{n+1}}{2^n}+\cdots=(0.x_2x_3\cdots x_{n+1}\cdots)_2$$

となり，$x_1=1$ ならば，$\frac{1}{2}\leqq x<1$ だから，

$$B(x)=2x-1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{2^n}+\cdots\right)-1$$
$$=\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2^2}+\cdots+\frac{x_{n+1}}{2^n}+\cdots=(0.x_2x_3\cdots x_{n+1}\cdots)_2$$

となる。したがって 2 進変換は，$x=(0.x_1x_2\cdots x_n\cdots)_2$ を左に一つずらす変換である。これから，

$$B^2(x)=(0.x_3x_4\cdots x_{n+2}\cdots)_2,\ \cdots,\ B^n(x)=(0.x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n}\cdots)_2$$

となることがわかる。2 進変換をこのように 2 進小数の左への**ずらし**(shift)の変換とみれば，その周期性が 2 進循環小数に結びつくことがわかる。例えば，

$$(0.11011101\cdots)_2=(0.\dot{1}10\dot{1})_2=\frac{13}{15}$$

は循環節の長さ 4 の循環小数であるから，$B(x)$ の 4 周期点である。

問 2　$0.\dot{1}10\dot{1}=\frac{13}{15}$ であることを示し，この点を出発する $B(x)$ の 4 周期軌道を求めよ。

2.2.2 軌道の安定性

ロジスティック写像 $L(x)=4x(1-x)$ を一般化した区間 $[0,1]$ 上の変換

$$L_R(x)=Rx(1-x)$$

を考えよう。ここで，パラメター R は $0<R\leqq4$ とする。そのときにかぎり，すべての $0\leqq x\leqq1$ に対して，$0\leqq L_R(x)\leqq1$ となるからである。この変換 L_R については 3 章で詳しく述べるが，今は $1<R<2$ のときを考える。

0，$1-\frac{1}{R}$，1 以外の相異なる 2 点 $x\neq y$ を出発した二つの軌道 $\{x, L_R(x), L_R^2(x), \cdots\}$ と $\{y, L_R(y), L_R^2(y), \cdots\}$ は，

$$\lim_{n\to\infty} L_R^n(x)=\lim_{n\to\infty} L_R^n(y)=1-\frac{1}{R}$$

となるので(図 2-6(c))，

$$\lim_{n\to\infty}|L_R^n(x)-L_R^n(y)|=0$$

である。一般に，変換 f による二つの軌道 $\{x, f(x), f^2(x), \cdots\}$ と $\{y, f(y), f^2(y), \cdots\}$ とが，

$$\lim_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(y)|=0$$

を満たすとき，この二つの軌道は**漸近する**(ある n から先 $f^n(x)=f^n(y)$ となる場合も含む)という。また，点 x が変換 f の不動点($f(x)=x$)のとき，x の近傍† の任意の点 $y(\neq x)$ を初期値とする軌道 $\{y, f(y), f^2(y), \cdots\}$ が

$$\lim_{n\to\infty}|f^n(y)-x|=0$$

を満たすとき，x は**安定**であるという。これは，x と y を初期値とする変換 f の軌道が漸近することでもある。例えば，変換 L_R は，$0<R\leqq 1$ のときには，0 が安定な不動点であるが，$1<R$ のときには，0 は安定ではなくなり，不安定となる。実際，$1<R<3$ のときには，いくら 0 に近い点 y から出発しても，$\lim_{n\to\infty} L_R^n(x)=1-\frac{1}{R}$ である(図 2-6(c))。実は，このとき $1-\frac{1}{R}$ が L_R の安定な不動点になっている。

また，x が変換 f の k 周期点のときには，$f^k(x)=x$ であるから，x は変換 f^k の不動点であるが，それが安定になっているならば，点 x は f の**安定な k 周期点**という。

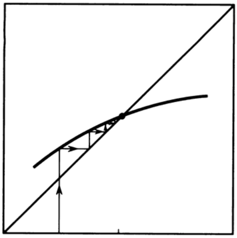
一般に，変換 f の不動点 x が安定であるか，不安定であるかは，$|f'(x)|<1$ であるか，$|f'(x)|>1$ であるかによって決まる(図 2-6(a), (b))。実際，$1<R<3$ のとき，$\left|L_R'\left(1-\frac{1}{R}\right)\right|=|2-R|<1$ である。

最後に，$f^k(x)=f(f^{k-1}(x))$ の微分計算とそれに関連した問題を挙げておく。使うのは合成関数の微分法だけである。

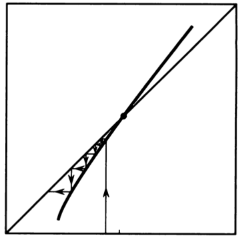
$$\frac{d}{dx}f^2(x)=\frac{d}{dx}f(f(x))=f'(f(x))f'(x)=\frac{df^2}{df}\frac{df}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}f^3(x)=f'(f^2(x))\frac{d}{dx}f^2(x)=f'(f^2(x))f'(f(x))f'(x)=\frac{df^3}{df^2}\frac{df^2}{df}\frac{df}{dx}.$$

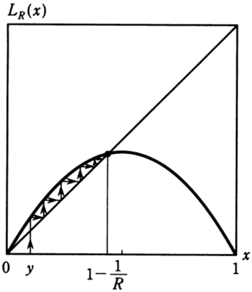
† 点 x からの距離がある正数 ε 未満であるような点 y のこと。このような y 全体の集合を x の **ε 近傍**という。これは開区間$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$のことである。平面上の点ならば，中心 x，半径 ε の円の内部となる。



(a) 安定な不動点



(b) 不安定な不動点



(c) $L_R(x)=Rx(1-x)\ (1<R<2)$ の安定な不動点

図 2-6

これを繰り返すことにより，

$$\frac{d}{dx}f^n(x)=f'(f^{n-1}(x))f'(f^{n-2}(x))\cdots f'(f(x))f'(x)$$

$$=\frac{df^n}{df^{n-1}}\frac{df^{n-1}}{df^{n-2}}\cdots\frac{df^2}{df}\frac{df}{dx}. \tag{2-2}$$

問 3　点 x_0 が変換 f の n 周期点で，$x_1=f(x_0)$，$x_2=f(x_1)=f^2(x_0)$，$\cdots$，$x_{n-1}=f^{n-1}(x_0)$ とするとき，g を変換 f^n とすると，

$$g'(x_0)=f'(x_0)f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_{n-1})$$

となることを示せ。また，このことから，

$$g'(x_0)=g'(x_1)=\cdots=g'(x_{n-1})=f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_{n-1})$$

となることを示せ(これより，同一の n 周期軌道上の点は，**同時に**安定であったり，不安定であったりすることがわかる)。

問 4　$f(x_0)=x_0$，$f'(x_0)=-1$ で，$g(x)=f^2(x)$ のとき，$g'(x_0)=1$，$g''(x_0)=0$ を示せ。

2.3 リ・ヨークの定理(つづき)

リ・ヨークの定理の前半については**2.1.1**で述べたが，その後半は，“区間 I から I への写像 f が周期 3 をもつ”という同じ条件の下で，次の結論が成り立つというものである。すなわち，

次の(i), (ii)を満たす f の非周期点の集合 S で非可算(付録 2B 参照)なものが存在する。

(i) S の任意の点 x と f の任意の周期点 p に対して，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f^n(x)-f^n(p)|>0. \tag{2-3}$$

(ii) S の任意の 2 点 x, y に対して，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f^n(x)-f^n(y)|>0, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}|f^n(x)-f^n(y)|=0. \tag{2-4}$$

この集合 S を**攪拌集合**(scrambled set)という。非可算の条件がなくとも攪拌集合ということもある。ここに出てきた記号 $\overline{\lim_{n\to\infty}}$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}$ は，$\lim_{n\to\infty}$ の概念を拡張したもので，付録 2C 参照していただきたい。

ところで，上の主張(i)は，S の点を出発した軌道が，いかなる周期軌道にも漸近しない(すなわち，$\lim_{n\to\infty}|f^n(x)-f^n(p)|=0$ とはならない)こと，(ii)は，S の異なる 2 点から出発した軌道は漸近しないが，途中ではいくらでも近づきうる($\underline{\lim_{n\to\infty}}|f^n(x)-f^n(y)|=0$)ことを述べている。そして，そのような出発点が非常に多くある(非可算個も！)というのである。このことが，カオス発生にふさわしい説明であると考えられたのである。

さて，**写像 f が非可算の攪拌集合をもつとき，f はリ・ヨークの意味でカオス的である**，あるいは，**f はリ・ヨークカオスである**，という。リ・ヨークの定理の条件“f が周期 3 をもつ”は，f がリ・ヨークカオスであるための十分条件である。実は，

“f が周期 $2^n(2m+1)$ $(n\geqq 0, m\geqq 1)$ をもてば，f はリ・ヨークカオスになる(Period$\neq 2^n$ implies chaos)。すなわち，非可算の攪拌集合 S が存在して，(2-3), (2-4)が成り立つ”†

のである。

---

† 2^n の形の無限個の周期をもつ(2^∞ 型という)が，$2^n(2m+1)$ 型の周期はもたない写像でも，リ・ヨークカオスになるものがあることがわかっている(J. Smítal, 1986)。

2.4 攪拌集合とリ・ヨークカオスの観測可能性

2.4.1 ナサンソンの例

区間[0, 1]から[0, 1]への次のような写像 $f(x)$ を考える(M. Nathanson, 1976)(図 2-7):

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{p} & \left(0\leqq x\leqq 1-\dfrac{1}{p}\right) \\ 1-\dfrac{1-\delta}{\delta}\left(x-\dfrac{p-1}{p}\right) & \left(1-\dfrac{1}{p}\leqq x\leqq 1-\dfrac{1}{p}+\delta\right) \\ x-\dfrac{p-1}{p} & \left(1-\dfrac{1}{p}+\delta\leqq x\leqq 1\right) \end{cases} \tag{2-5}$$

ここで p は 3 以上の整数で, $0<\delta<\dfrac{1}{2^p}$ である。このとき,

$$f^3\left(1-\frac{2}{p}\right)\leqq 1-\frac{2}{p}<f\left(1-\frac{2}{p}\right)<f^2\left(1-\frac{2}{p}\right)$$

となり(図 2-1 の図説参照), リ・ヨークの定理の条件を満たしている。実際,

$$f\left(1-\frac{2}{p}\right)=1-\frac{1}{p},\qquad f\left(1-\frac{1}{p}\right)=1,\qquad f(1)=\frac{1}{p}$$

であり, $\dfrac{1}{p}\leqq 1-\dfrac{2}{p}$ は $3\leqq p$ と同値である。したがって, この f はリ・ヨークカオスであるが, f の攪拌集合 S は測度零の集合† になってしまう。実際, 図 2-7 の場合, f によって区間 $\left[\delta,\frac{1}{3}\right]$ は $\left[\frac{1}{3}+\delta,\frac{2}{3}\right]$ に, $\left[\frac{1}{3}+\delta,\frac{2}{3}\right]$ は $\left[\frac{2}{3}+\delta,1\right]$ に, $\left[\frac{2}{3}+\delta,1\right]$ は $\left[\delta,\frac{1}{3}\right]$ に平行移動されるので, この三つの区間内の点はすべて 3 周期点である。さらに, 残りの区間 $[0,1]-\left[\frac{1}{\delta},\frac{1}{3}\right]-\left[\frac{1}{3}+\delta,\frac{2}{3}\right]-\left[\frac{2}{3}+\delta,1\right]$ からある零集合 E を除いた残りのすべての

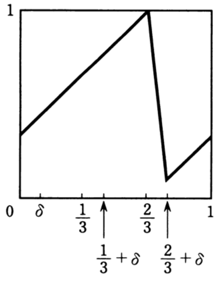


図 2-7 ナタンソンの例 $\left(p=\frac{1}{3},\ \delta<\frac{1}{8}\right)$

† 付録 2D を参照。**零集合**ともいう。

点 x は，究極的3周期点であることが証明できる。すなわち，区間 [0, 1] より零集合 E を除いた残りの点は，3周期点であるか，究極的3周期点である。ところが，リ・ヨークの定理により攪拌集合 S が存在するが，これは零集合 E に含まれていなければならない。よって，S は零集合である。

変換 f の攪拌集合 S はさまざまなとり方がある（例えば，S の非可算部分集合 S' は明らかに攪拌集合である）が，この例の場合には，どんな S も零集合である。

2.4.2　リ・ヨークカオスの観測可能性

平面上の直線のように長さのみあって幅のない面積0の図形は，2次元の集合としては観測にかからないだろう。それゆえナサンソンの変換のように，あらゆる攪拌集合 S が零集合ならば，S は観測されない，すなわち，初期値の集合 S に当る確率は0である。そこで，ある変換 f に測度正（$\mu(S)>0$）の攪拌集合 S が存在するときに，f のカオスは**観測可能**であると定義すればよいのだが，より一般的な場合（S が非可測集合（付録 2D 参照）の場合）も考慮して，

“S を内側から小さめに測った内測度が正（$\mu_*(S)>0$）であるような攪拌集合 S が存在するときに，f は観測可能なカオスをもつ”

と定義しよう（久保泉，1989）。そうすると，当然，ナサンソンの変換は**観測不可能**なカオスをもつ（零集合の内測度は零であるからである）。また，テント写像 $T(x)$ の場合には，S を外側から大きめに測った外測度が1（$1=\mu^*(S)$）であるような非可測（すなわち，$\mu^*(S)>\mu_*(S)$）な攪拌集合をもつことが示されている（J. Smítal，1983）が，テント写像では可測な攪拌集合は必ず零集合となることも示されているので，任意の攪拌集合 S の内測度＝0となり，$T(x)$ のカオスは観測不可能である。なぜなら，$\mu_*(S)$ は，S に含まれる可測な攪拌集合 $S'(\subset S)$ の測度 $\mu(S')$ の下限†（$\mu_*(S)=\inf \mu(S')$）であり，$\mu(S')=0$ であるからである。テント写像についてのこの結果は，より一般的な場合についても成り立つことがわかっている。このことは，リ・ヨークカオスがカオスの一面しかとらえていないことを示しているといえよう。すなわち，テント写像やそれと共役

† 下限は最小値を一般化した概念（付録 2D，脚注を参照）である。また，内測度についてのこの性質については，測度論やルベーグ積分論の書物を参照されたい。

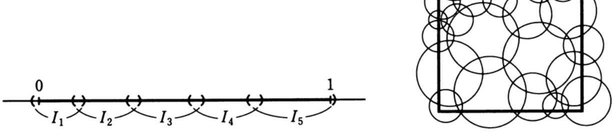
(**2.6.2** 参照)なロジスティック写像などでは，攪拌集合 S のルベーグ測度は 0 で観測されないが，計算機ではこれらのカオスは観測される。ということは，われわれの観測しているカオスは，攪拌集合とは別のカオスなのである。本書では 3 章以降，主としてこうした観測されるカオスを扱う。

2.5　位相的エントロピー

リ・ヨークカオスと密接な関係にあるのが，位相的エントロピー(topological entropy)である。ここでは，区間 $I=[a, b]$ から I への連続な写像 f に対して，その位相的エントロピー $h(f)$ を導入するが，より一般的な定義が可能である。以下では，理論を展開する必要上，開集合(open set)なるものが登場するが，今の場合それは開区間，またはその有限個または無限個の合併集合と思えばよい。それは，平面上の集合ならば，円周を除いた円の内部である開円板，またはその合併集合と思ってよい。

さて，図形を有限個(または無限個)の開集合で隙間なく覆う(図 2-8，(a)，(b))とき，そうした開区間の組(class)を開被覆(open cover)という。今，区間 I が開集合 $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$ で覆われているとき，その集合の組である開被覆を $\alpha=\{I_n\}_{n\geq 1}$ で表わす。そのとき，これらの中には重複して I を覆っているものもあるだろうから，より効率的に I を覆えば，$\{I_n\}_{n\geq 1}$ のすべてを使わなくとも I を覆うことができるだろう。そのうち最も少ない個数で I を覆えるものの開集合の個数を $N(\alpha)$ で表わす(最初に無限個の開集合があっても，必ず有限個で覆える)。

写像 f と集合 E に対して，f によって E の点に写像されるような I の



(a)　区間 [0, 1] を開区間で覆う　　(b)　正方形を開円板で覆う

図 2-8

点 x 全体の集合を，E の f による**原像**(inverse image)といい，$f^{-1}E$ $(=\{x \mid f(x) \in E\})$ で表わす。f が連続で E が開集合のときには，$f^{-1}E$ も開集合になる。例えば，テント写像 T，$E=\left(0, \frac{1}{2}\right)$ のとき，$T^{-1}E$ は二つの区間 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$，$\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ の合併集合 $\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ である(図 2-9)。

I の開被覆 $\alpha=\{I_n\}_{n\geqq 1}$ に対して，各 I_n の写像 f による原像 $f^{-1}I_n$ の全体 $\{f^{-1}I_n\}_{n\geqq 1}$ も I の開被覆になることが示せるので，それを $f^{-1}\alpha$ で表わす。また，$\beta=\{J_m\}_{m\geqq 1}$ を I の別な開被覆とする。そのとき，任意の n, m に対して，I_n と J_m の共通部分 $I_n \cap J_m$ は開集合になり，それらを全部合併した集合 $\bigcup_{n\geqq 1} \bigcup_{m\geqq 1} (I_n \cap J_m)$ は I を覆うので，$\{I_n \cap J_m\}_{n,m\geqq 1}$ は I の開被覆になる。それを記号 $\alpha \vee \beta$ で表わす。これは，明らかに α, β よりも細かい集合で I を覆うことになる。例えば，$I=[0, 1]$，α, β を開被覆 $\alpha=\left\{\left[0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, 1\right]\right\}$，$\beta=\left\{\left[0, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{8}, 1\right]\right\}$† とすれば，$\alpha \vee \beta$ は両者の開区間の共通部分である $\left\{\left[0, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{8}, 1\right]\right\}$ となる。しかし，区間 $[0, 1]$ は，$\left[0, \frac{3}{8}\right)$，$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$，$\left(\frac{5}{8}, 1\right]$ の 3 個の区間で覆えてしまうので，最小の区間の個数としては，$N(\alpha \vee \beta)=3$ を得る。

問 5 α, β が I の開被覆で，f が I から I への連続写像のとき，$f^{-1}\alpha$, $\alpha \vee \beta$ も I の開被覆となることを示せ。

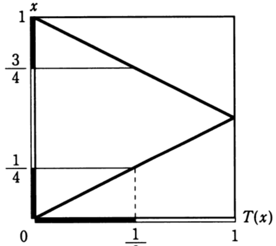


図 2-9 テント写像による区間の原像。x 軸(縦方向)上の黒(白)い区間が，$T(x)$ 軸(横方向)上の黒(白)い区間の原像となる。

† 区間 $[0, 1]$ の外側は考えないので，0, 1 の入った区間は $\left[0, \frac{3}{8}\right)$，$\left(\frac{1}{4}, 1\right]$ などの半開区間とした。

特に，$\beta=f^{-1}\alpha$ とき，$\alpha\vee f^{-1}\alpha$ は開被覆である。これにさらに開被覆 $f^{-1}(f^{-1}\alpha)$ ($=f^{-2}\alpha$ と書く)をつけ加えた $(\alpha\vee f^{-1}\alpha)\vee f^{-2}\alpha=\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee f^{-2}\alpha$ も同様に開被覆になる。これを $n-1$ 回続けると，開被覆 $\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee f^{-2}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha$ を得るが，これを $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha$ で表わす。このとき，この開被覆における最も効率的な(この開被覆中の最小個数の開集合による) I の開被覆の個数 $N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha\right)$ の対数 $\log N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha\right)$ は，この開被覆のエントロピー† とでもいうべき量である。その1ステップ当りのエントロピー $\frac{1}{n}\log N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-1}\alpha\right)$ は，$n\to\infty$ のとき，ある極限値に収束するので，それを $h(\alpha, f)$ で表わす：

$$h(\alpha, f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha\right) \tag{2-6}$$

この値は I の最初の被覆 α に関係するが，すべての開被覆に対するその上限 $\sup h(\alpha, f)$ は，もう写像 f にしか関係しない量となる。それを f の**位相的エントロピー**(topological entropy)といい，$h(f)$ で表わす：

$$h(f)=\sup h(\alpha, f) \tag{2-7}$$

なお，「位相的」という用語は，連続写像や開集合を対象とする数学を位相数学(topology)とよぶことからきている。

位相的エントロピー $h(f)$ は，写像 f のある意味での複雑さの度合いを測るものである。図 2-10 は，テント写像 T とそれを $\frac{2}{3}$ 倍した $\frac{2}{3}T$，区間 $[0,1]$ の閉被覆†† $\alpha=\left\{\left[0,\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$ について，二つの写像の1回から4回までの繰り返し写像によって，α の原像がどのように細かくなっていくかを比べたものである。この各段階での原像の共通部分を取ったものが，$\bigvee_{i=0}^{4} T^{-i}(\alpha)$，$\bigvee_{i=0}^{4}\left(\frac{2}{3}T\right)^{-i}(\alpha)$ である。この段階でも，T のほうが $\frac{2}{3}T$ より複雑，すなわち，$[0,1]$ 区間の点をより多く攪拌していることがわかるだろう。それが，両者の位相的エントロピー $h(T)$, $h\left(\frac{2}{3}T\right)$ に反映するのである。

写像 f が区間 I で区分的に単調なときには，f の n 回繰り返し写像 f^n の**ラップ数**(lap number)を用いて位相的エントロピー $h(f)$ を求めることができる：

---

† N 個の要素からなる集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ のエントロピーは，$\log_2 N$ で定義される。これは，この集合の複雑さの度合いを測る量である。

†† 図を書きやすくするために便宜的に閉集合による被覆としたが，状況を見るのには差し支えない。

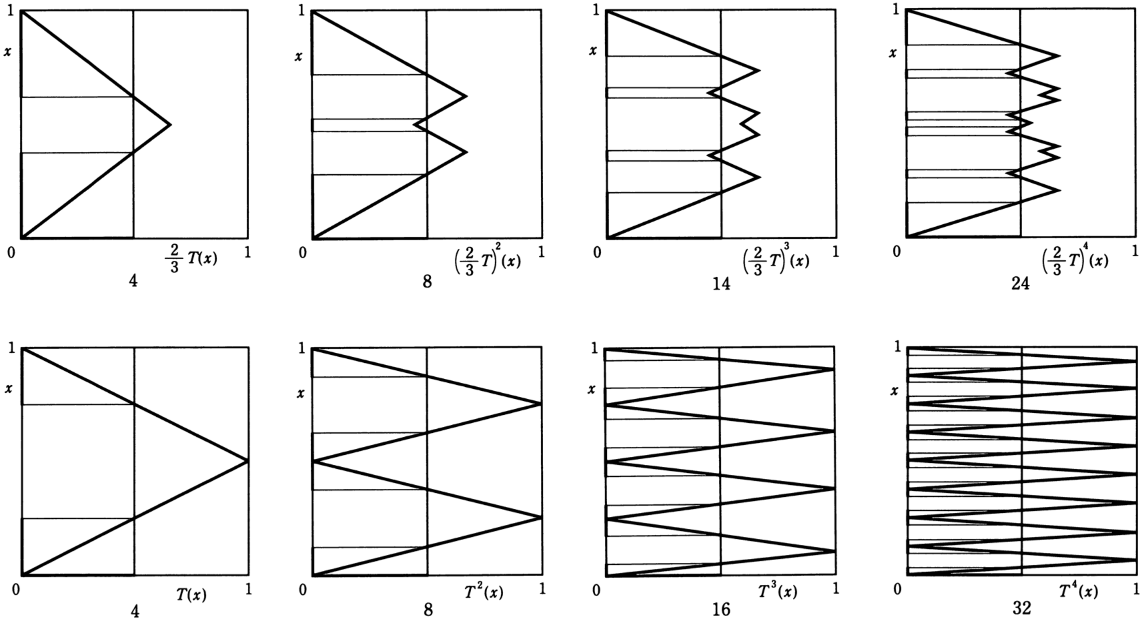


図 2-10　$\frac{2}{3}T(x)=\frac{2}{3}(1-|1-2x|)$ と $T(x)$ の繰返し写像による集合 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ と $\left[\frac{1}{2},1\right]$ の原像。
下の数字は，この集合による被覆の個数 $N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha\right)$，$f=\frac{2}{3}T$，$T$.

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \mathrm{lap}(f^n). \tag{2-8}$$

ただし，写像 f のラップ数 $\mathrm{lap}(f)$ とは，$f(x)$ の単調な区間をできるだけ広く取ったときの，全区間 I におけるそうした区間の個数のことである(図 2-11)。一般に f^n のラップ数は，n とともに増大する。それが n のべき乗の大きさ，例えば，$\mathrm{lap}(f^n)\sim cn^{\alpha}$† のときには，

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(cn^{\alpha})=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\log n=0$$

であり，指数関数の大きさ $\mathrm{lap}(f^n)\sim ca^n\,(a>1)$ のときには，

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log ca^n=\log a$$

となる。このように，$\mathrm{lap}(f^n)$ の増大の仕方によって，写像 f の位相的エントロピー $h(f)$ は決まるのである。

具体的な例によって，位相的エントロピーがラップ数に関係することを説明しよう。図 2-12 は，3 周期軌道 $\left\{0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{2},1,\cdots\right\}$ をもつ写像

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2} & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right) \\ 2(1-x) & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right)\end{cases}$$

に対する $f^n(x)$ のグラフである。そのラップ数は 2, 3, 5, 8, 13, $\cdots$ となるが，これはフィボナッチ(Fibonatti)数列($a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$ を満たし，$a_0=1$，$a_1=2$ である数列)である。事情を明確にするために，$I=[0,1]$ の被覆を閉区間で行うこととし，閉被覆 $\alpha=\left\{\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$ を取る。このとき，

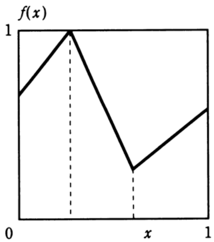


図 **2-11**　ラップ数 ($\mathrm{lap}(f)=3$)

† $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ のとき，$a_n\sim b_n$ と書くことにする。

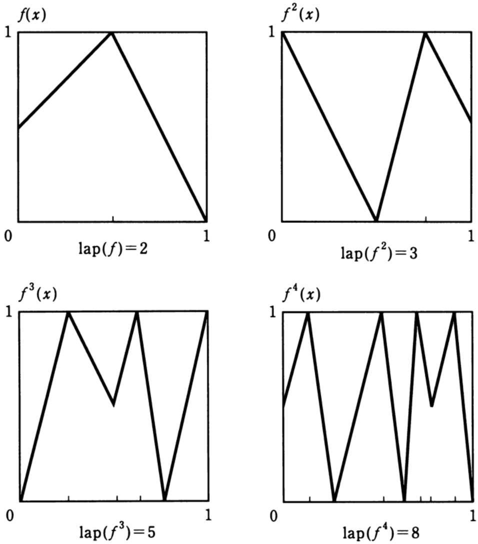


図 2-12 繰返し写像のラップ数の増加

$$f^{-1}\left[0,\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{3}{4},1\right],\qquad f^{-1}\left[\frac{1}{2},1\right]=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$$

であるから，

$$f^{-1}\alpha=\left\{\left[0,\frac{1}{2}\right],\ \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right],\ \left[\frac{3}{4},1\right]\right\},\qquad \alpha\vee f^{-1}\alpha=f^{-1}\alpha$$

となる。ここで，

$$N(\alpha)=2,\qquad N(f^{-1}\alpha)=3$$

である。次に，

$$f^{-2}\alpha=\left\{\left[0,\frac{1}{4}\right],\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right],\ \left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right],\ \left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right],\ \left[\frac{3}{4},1\right]\right\}$$

であり，

$$\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee f^{-2}\alpha=f^{-2}\alpha,\qquad N\left(\bigvee_{i=0}^{2}f^{-i}\alpha\right)=N(f^{-2}\alpha)=5\ \ (=2+3).$$

そして次に，

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{3}f^{-i}\alpha\right)=N(f^{-3}\alpha)=8\ \ (=3+5).$$

これを続けて，

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\alpha\right)=N(f^{-(n-1)}\alpha)$$

がフィボナッチ数列をなし，$\mathrm{lap}(f^n)$ と一致することがわかる。

問 6　この例で，$N(f^{-3}\alpha)=8$ を確かめよ。

さて，具体的な写像 f について，位相的エントロピー $h(f)$ を定義から直接求めるのは困難なことが多く，いくつかの数値計算の方法が考案されている。以下では $\mathrm{lap}(f^n)$ が求まり，$h(f)$ がそれから計算できる例を挙げる。なお，超安定周期点(3 章を参照)を有する写像の位相的エントロピーの計算は付録 3C で述べる。

（1）　$L_R(x)=Rx(1-x)\ (0<R<2)$ のとき

$L_R'(x)=0$ となるのは，$x=\dfrac{1}{2}$ のときのみであることと，明らかに，$L_R^n(x)<\dfrac{1}{2}$ であることから，(2-2) を用いて，

$$(L_R^n(x))'=L_R'(L_R^{n-1}(x))\,L_R'(L_R^{n-2}(x))\cdots L_R'(L_R(x))\,L_R'(x)=0$$

となるのは $x=\dfrac{1}{2}$ のときのみである。したがって，$L_R^n(x)$ のグラフは本質的に $L_R(x)$ のグラフと同じであり，$\mathrm{lap}(L_R^n)=2$ である。ゆえに，$h(L_R)=0$．また，$h(L_2)=0$ も容易にわかる。

（2）　$L_4(x)=4x(1-x)$ のとき

グラフを描いてみれば容易にわかるように(図 2-5(b))，$\mathrm{lap}(L_4^n)=2^n$ であり，これから，$h(L_4)=\log 2$ となる。テント写像の場合もまったく同様である。

（3）　$L_R(x)=Rx(1-x)\ (2<R<4)$ のとき

この場合は複雑である。まず，

$$(L_R^{n+1}(x))'=(RL_R^n(x)\{1-L_R^n(x)\})'=R\{1-2L_R^n(x)\}(L_R^n(x))'$$

であることから，

$$\mathrm{lap}(L_R^{n+1})=\mathrm{lap}(L_R^n)+\#\left\{x\;\middle|\;L_R^n(x)=\frac{1}{2}\right\}^{\dagger}$$

となることを注意しておこう。

† $\#\{A\}$ は集合 A の要素の個数を表わす記号

（i）　$2<R<1+\sqrt{5}=3.236\cdots$ のとき

この条件は，$L_R^2\left(\frac{1}{2}\right)=L_R\left(\frac{R}{4}\right)>\frac{1}{2}$ と同値であり，このとき，すべての n に対して，$L_R^n(x)=\frac{1}{2}$ の解は 2 個である。このことから，$\mathrm{lap}(L_R^n)$ は公差 2 の等差数列で，$2n$ となることがわかる（図 2-13(a)）。ゆえに，$h(L_R)=0$.

（ii）　$1+\sqrt{5}<R$ のとき

$\#\left\{x \,\middle|\, L_R^n(x)=\frac{1}{2}\right\}$ は 2 より大となり，n の多項式としての $\mathrm{lap}(L_R^n)$ の次数が増大していくと予想される（この段階では，L_R の位相的エントロピー $h(L_R)=0$）。そしてついには，$\mathrm{lap}(L_R^n)$ は n の指数関数となって，$h(L_R)>0$ となるであろう（図 2-13(b)）。実際，$R=3.8318\cdots$（R についての方程式 $L_R^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ の解）のときには，$\mathrm{lap}(L_R^n)+1$ がフィボナッチ数列 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots$ になり，

$$\mathrm{lap}(L_R^n)=A\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n+B\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n-1 \qquad (A, B>0)$$

となることがわかる。これから，

$$h(L_R)=\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\log 1.618\cdots.$$

問 7　$\mathrm{lap}(f^n)=A\alpha^n+B\beta^n+C$ $(A, B>0\,;\,\alpha>1\,;\,\alpha>\beta>0)$ のときには，$h(f)=\log\alpha$ となることを示せ。

さて，写像 f の位相的エントロピー $h(f)$ とカオスとの関係であるが，$h(f)>0$ ならば，f はリ・ヨークカオスであることがわかっている。しかし，この逆は真ではなく，$h(f)=0$ でもリ・ヨークカオスとなる写像の存在がわかっている。実は，$h(f)>0$ の必要十分条件は，

“f が $2^n(2m+1)$ 周期 $(n\geqq 0, m\geqq 1)$ をもつ”

ことである（2.3 節の最後を参照）。

$h(f)>0$ の必要十分条件にはさまざまな形のものがあり，次のような写像 f の拡大性についての条件もある。すなわち，

“共通部分のない閉区間 I，J と自然数 n があり，$f^n(I)\cap f^n(J)\supset I$，$f^n(I)\cap f^n(J)\supset J$”

これは，例えばテント写像の場合，写像を施すたびに区間の幅が 2 倍に拡大されるので，この条件は明らかに成り立っていることがわかる。

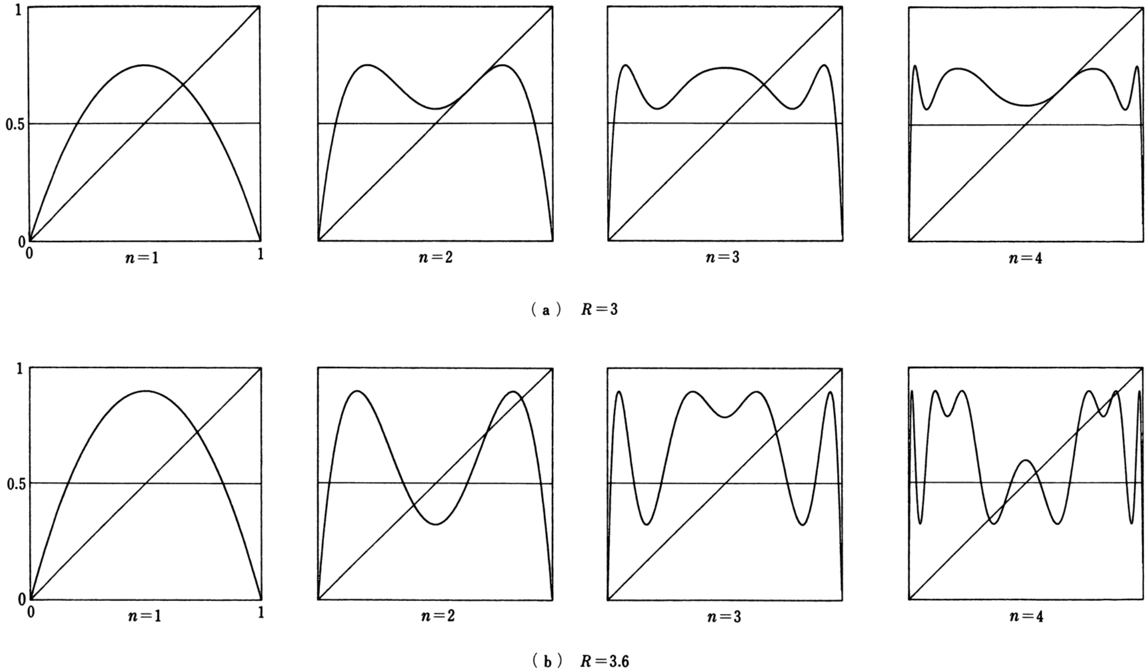


図 2-13　$L_R(x)$の繰返し写像 $L_R^n(x)$のグラフ。ラップ数は，(a) $2n$ で増加，(b) $2n$ より速く増加(n の大きなところでは，指数関数的に増える)

2.6　軌道の稠密性

2.6.1　観測可能なカオスとリアプノフ数

2.4 節で述べたように，非可算な攪拌集合の存在や位相的エントロピー $h(f)>0$ はカオスという現象を必ずしもうまくとらえているとはいえない。図 2-14(a)は，ロジスティック写像 $L_R(x)=Rx(1-x)$ において，R を 3.5 から 4 まで変化させたときの，各 R(横軸)に対する L_R の軌道(縦軸)の図である。例えば $R=3.84$ 付近では安定な 3 周期，6 周期，12 周期,・・・の軌道があり，リ・ヨークカオスは(発生しているが)観測できない。そうした R の場所は**窓**(window)とよばれているが，それ以外の R $(>R_\infty)$[†] の値に対しては, $L_R(x)$ の軌道は x のある区間で稠密[††] になっていて，いかにもカオスが発生しているようなところである。図 2-14(b)のほうは，同じ R の値に対して，L_R の位相的エントロピー(滑らかな曲線)とリアプノフ数[†††](ギザギザの曲線)をコンピュータで求めたものである(求め方は付録 3C のニーディング・シーケンス法による)。

この二つの図を比較してみると，$h(f)$ のほうは，$R=R_\infty=3.57\cdots$(この R の値は，2^n型の周期から $2^n(2m+1)$ 型に移行するところ)でカオスが発生してからは単調に増大してゆくが，窓では平になっていること，リアプノフ数が窓では負になっていること，などがわかる。こうしたことをみると，観測可能なカオスをとらえるには，リ・ヨークカオスや位相的エントロピーより，リアプノフ数が適切である。すなわち, リアプノフ数 >0 が観測可能なカオスをもたらす，のである。

実は，リアプノフ数は，位相的エントロピーとは別なコルモゴロフエントロピー(Kolmogrov entropy)と関係するのであるが，これについては本書では述べない。

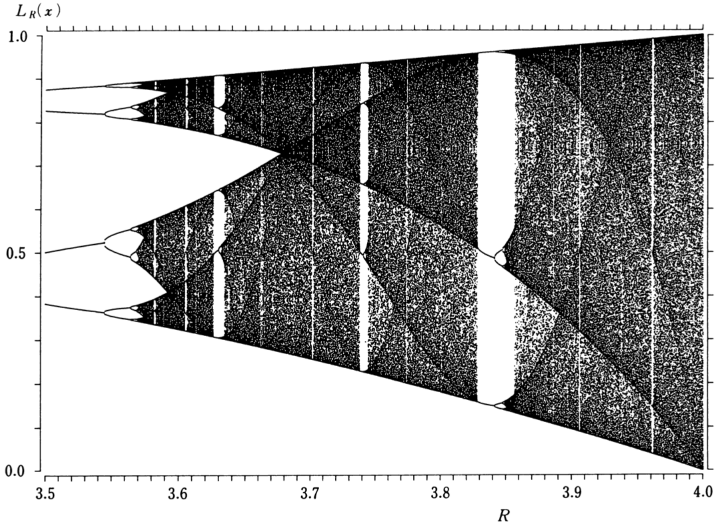
---

† 後に述べるが，R_∞ は 2 のべき乗の周期を発生させる R の値の上限である(3.1 節を参照)。

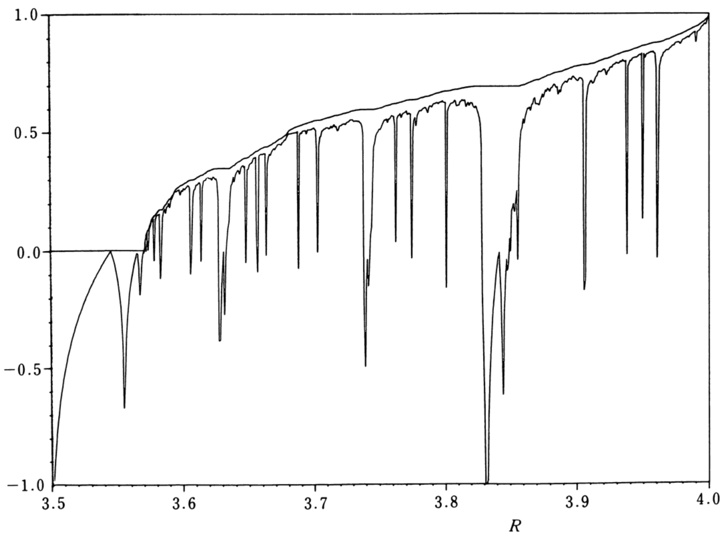
†† ‘稠密’ の意味については，**2.6.2** を参照

††† 2.8 節を参照

*(次頁の注)　ここで，定常軌道というのは，1) 周期軌道，および，2) 一つの不変測度のもとでの軌道，を指すこととする。カオス軌道で示されているのは，計算機で実際に観測された最も観測されやすい不変測度に基づく軌道である。



(a)



(b)

図 2-14　(a) R に対する $L_R(x)=Rx(1-x)$ の定常軌道*(脚注は前頁)
(b) $L_R(x)$の位相エントロピー(上)と，リアプノフ数(下のギザギザの線)。両者は共通の尺度で描いてあり，$R=4$ での値は log 2 である。

2.6.2 軌道の稠密性

観測可能なカオスが発生しているときには，軌道がある領域を稠密に埋めつくす，といった現象が起こる。これは，変換のエルゴード性や混合性といったことに関係するもので，以下ではそのことを2進変換 $B(x)$ を例として説明しよう。

区間 $[0,1]$ の数 x を2進小数で表わしたとき，**2.2.1** で述べたように，x が有理数ならばそれは循環小数になり，x が無理数ならば循環しない無限小数となる。2進変換 $B(x)$ は2進小数を1桁ずらす変換であるから，x が循環節の長さが k の循環小数ならば，x を出発する変換 B の軌道は k 周期軌道となり，x が無理数ならば，x を出発する B の軌道は非周期的である。こうして，2進変換に対しては，区間 $[0,1]$ のほとんどすべての数† x を初期値とする軌道 $\{x, B(x), B^2(x), \cdots\}$ はこの区間で**稠密**になる(すなわち，$[0,1]$ に含まれるどんな小さな区間(α,β)の中にもこの軌道の点が入る)。さらに，$[0,1]$ に**一様に分布する**。すなわち，$N(x, (a,b), n)$ を，この軌道の最初の n 個の点 $x, B(x), B^2(x), \cdots, B^{n-1}(x)$ のうちで，区間(a,b)に入るものの個数としたとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N(x,(a,b),n)=b-a$$

が任意の $[0,1]$ に含まれる区間(a,b)について成り立つ。

このことを以下具体的に説明しよう。図2-15のように $[0,1]$ 区間を4等分すると，この各区間に入る数は2進小数では，小数点以下2桁の数で特徴づけられ，$I_1=\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 内の数は $(0.00\cdots)_2$，$I_2=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内の数は $(0.01\cdots)_2$，$I_3=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ 内の数は $(0.10\cdots)_2$，$I_4=\left(\frac{3}{4},1\right)$ 内の数は $(0.11\cdots)_2$ となる。

2進正規数(付録2E参照) $x=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$ を2進変換 $B(x)$ で何度もずらしてゆくと，$B^2(x)=0.x_2x_3\cdots x_{n+1}\cdots$，$B^3(x)=0.x_3x_4\cdots x_{n+2}\cdots, \cdots$ は，同じ頻度でこの四つの区間に入る。同様に，任意の $n\geqq1$ に対して，$[0,1]$ 区間を 2^n 等分した各区間にも，こうしたずらしの点列 $\{x, B(x), B^2(x), \cdots, B^k(x), \cdots\}$ が同じ頻度で入る。すなわち，x を出発した

---

† $[0,1]$ 区間から測度0の集合を除いた残りのすべての数という意味で，ルベーグ積分論や測度論の関係する分野ではよく使う表現である(付録2Dを参照)。

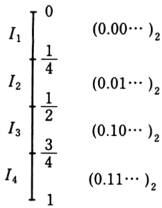


図 2-15 4等分した区間 $[0, 1]$ と2進数

$B(x)$ による軌道は，$[0, 1]$ 区間内で稠密かつ一様に分布する。これは x が2進正規数であることと，ほとんど同値なことである(問11を参照)。

問 8 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を2進小数で表わすと，$(0.101101010000010011110011001100\cdots)_2$ となる。これを初期値とする2進変換 $B(x)$ の軌道の点 $x, B(x), B^2(x), \cdots, B^{28}(x)$ のうち上述の四つの区間 I_1, I_2, I_3, I_4 に入る個数を調べよ。

問 9 $x=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$ が2進正規数のとき，x を初期値とする2進変換 B による軌道が $[0, 1]$ で一様に分布することを示せ。

次に，テント写像 $T(x)=1-|2x-1|$ について考える。この写像は，$0 \leqq x < \dfrac{1}{2}$ の場合，$T(x)=2x$ となり2進変換 $B(x)$ と同じである。$\dfrac{1}{2} \leqq x < 1$ の場合には，$T(x)=2-2x$ であるが，このとき $B(x)=2x-1$ であるから，$T(x)=1-B(x)$ の関係がある。$1=(0.111\cdots)_2$ であり，$B(x)$ は2進小数のずらしであることから，$T(x)$ は $x=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$ を一つ左にずらしたもの $0.x_2x_3\cdots x_{n+1}\cdots$ の0と1を反転したものになる。すなわち，

$$T(x)=0.y_2y_3\cdots y_{n+1}\cdots \qquad (y_n=1-x_n,\ \ n=2, 3, \cdots)$$

となる。このことから，テント写像 $T(x)$ は2進小数の正規性を保つことがわかる。したがって，2進変換について成立する軌道の稠密性や分布の一様性は，$T(x)$ に対してもそのまま成立する。

最後にロジスティック変換 $L(x)=4x(1-x)$ を考える。$L(x_n)=x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$ において，

$$x_n=\sin^2\theta_n \tag{2-9}$$

とおくと，$\sin^2\theta_{n+1}=4\sin^2\theta_n\cdot(1-\sin^2\theta_n)=\sin^2 2\theta_n$ となるので，

$$\theta_{n+1}=\begin{cases} 2\theta_n & \left(0 \leqq \theta_n \leqq \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \pi-2\theta_n & \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta_n \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{2-10}$$

となる。これは区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ におけるテント写像であるから，$y_n = \frac{2}{\pi}\theta_n$ とおけば，(1-3)で示した $y_{n+1} = T(y_n)$ となる。

問 10 $y_n = \frac{2}{\pi}\theta_n = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x_n}$ とおくことにより，テント写像 $y_{n+1} = T(y_n)$ より，ロジスティック写像 $x_{n+1} = L(x_n)$ が導かれることを示せ。

このように，テント写像とロジスティック写像とは，変数の変換により互いに移り変る。このような写像を互いに**共役**(conjugate)であるといい，共役な写像は，一方の性質から他方の性質がわかってしまうのである。一例として，先に述べたテント写像に関する軌道の稠密性は，ロジスティック写像に対しても成立する。

問 11 テント写像において，ある軌道が区間 [0, 1] で稠密ならば，ロジスティック写像においても，対応する初期値から出発する軌道が区間 [0, 1] で稠密になることを示せ(軌道が [0, 1] で一様に分布するという性質は成り立たなくなる)。

ところで，$x_n = \sin^2\theta_n = \sin^2\frac{\pi}{2}y_n$ (問 10)より，

$$dx_n = 2\sin\theta_n\cos\theta_n\, d\theta_n = 2\sqrt{x_n(1-x_n)}\,\frac{\pi}{2}dy_n$$

であるから，

$$dy_n = \frac{1}{\pi\sqrt{x_n(1-x_n)}}dx_n \tag{2-11}$$

が導かれる。この式より，テント写像で軌道の点が [0, 1] に一様に分布していても，ロジスティック写像では，両端に多く点が分布するようになることがわかる。それが，1章で示した図 1-12 である。また，2 進変換やテント写像では，周期軌道を与える初期値は有理数であるのに対して，ロジスティック写像では，$x = \sin^2\frac{\pi}{2}y$ の変換で無理数となる。このことは，これらの写像で軌道を発生させるときの状況と合致している。すなわち，2 進変換やテント写像では，簡単な有理数の初期値(0.2 とか 0.35 など)から出発すると周期軌道になるのに対して，ロジスティック写像では非周期軌道を発生させることができるのである。

2.7 不変測度

前節において，2進変換，テント写像，ロジスティック写像について，ある初期値から出発した場合の軌道の区間内の分布を考えたが，軌道 $\{x_n\}$ は n が大きくなると，一定の分布密度 $\rho(x)$ で記述される分布に従う。この $\rho(x)$ として区間 [0,1] で規格化されたもの $\int_0^1 \rho(x)\,dx=1$ が便利である：

$$\rho(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i) \tag{2-12}$$

ここで，$\delta(x)$ はディラック(Dirac)のデルタ関数(付録2G参照)である。

k 周期軌道の場合には

$$\rho(x)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\delta(x-x_i) \tag{2-13}$$

となる。乱数的無理数(付録2Eの正規数)より出発した $B(x)$, $T(x)$ の非周期軌道の場合には

$$\rho(x)=1 \tag{2-14}$$

となり，この $B(x)$ の非周期軌道に対応する。$L(x)$ の非周期軌道の場合には

$$\rho(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{2-15}$$

となる。

これらの $\rho(x)$ を**不変測度**(invariant measure)の密度という。この不変測度を用いると一般的にある量 $A(x)$ の軌道に関する平均値，$\langle A(x)\rangle$ は $\rho(x)$ の重みをかけた空間平均として次のように書ける(この式は後述するリアプノフ数などの計算に便利である)：

$$\begin{aligned}\langle A(x)\rangle &=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}A(x_i)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int A(x)\,\delta(x-x_i)\,dx\\ &=\int A(x)\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i)\,dx\\ &=\int A(x)\,\rho(x)\,dx \end{aligned} \tag{2-16}$$

ただし，積分範囲は区間 I に関してである。

ところで，2進変換 $B(x)$，テント写像 $T(x)$ の不変測度 $\rho(x)$ は，初

期値により次の三つの場合に分類できる：

（1） 周期軌道の場合（周期軌道にいつかは入る場合も含めて）

（2） 乱数的無理数の場合

（3） 非乱数的無理数の場合

この三つの場合のうち，ほとんどすべてが(2)の場合であり，対応する不変測度は(2-14)で与えられる。また，$T(x)$ と共役な写像 $L(x)$ では，それに対応するのが(2-15)である。

最後に不変測度 $\rho(x)$ の満たす関係について述べる。写像を $f(x)$ とすると，デルタ関数の関係式より

$$\int\delta(y-f(x))\delta(x-x_i)\,dx=\delta(y-f(x_i))=\delta(y-x_{i+1})$$

であるので

$$\begin{aligned}\rho(y)&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(y-x_i)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(y-x_{i+1})\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int\delta(y-f(x))\delta(x-x_i)\,dx\\&=\int\delta(y-f(x))\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i)\,dx.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \rho(y)=\int\delta(y-f(x))\rho(x)\,dx \tag{2-17}$$

の関係が得られる。ここで積分範囲は写像の定義域としての区間である。この(2-17)を**フロベニウス・ペロン**(Frobenius-Perron)**の関係式**という。

問12 $f(x)=T(x)=1-|2x-1|$，$\rho(x)=1$ の場合，および，$f(x)=L(x)=4x(1-x)$，$\rho(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ の場合，ともにフロベニウス・ペロンの関係式を満たすことを示せ。

2.8 リアプノフ数

今まで述べてきたカオスを生ずる写像である $L(x)$, $T(x)$, $B(x)$ の特徴は逆写像が二価であること，すなわち二重になっているので平均的な傾きが大きいことが特徴である。この傾きの大きさが，1章で述べたカオスの基本的な性質の**引き延ばし，折り畳み**現象が生ずる基となる。したがって，この写像の傾きが1以上であること，もしくは接近した2点が指数関

数的に大きくなってゆくこと，をカオスの生ずる基準とする。その指数の平均を軌道について十分長い時間とったものを λ とおき，これを**リアプノフ**(Lyapunov)**数**とよぶ：

$$\lambda=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\log|f'(x_i)| \tag{2-18}$$

すなわち，$\lambda>0$ ならば，上に述べた近接した軌道間の距離は，指数関数的に増大することになる。軌道がこのような性質を示す系を**不安定な系**という。

テント写像 $T(x)$ や $B(x)$ においては，$|f'(x)|=2$ であるので $\lambda=\log 2$ となる。ロジスティック写像など，不規則軌道 $\{x_i\}$ が $[0,1]$ で分布が一様でない場合のリアプノフ数を計算するには，不変測度をかけた空間平均の式(2-16)を用いて

$$\lambda=\int\log|f'(x)|\,\rho(x)\,dx \tag{2-19}$$

と書ける。

以下，具体的にロジスティック写像 $L(x)$ に関してリアプノフ数 λ を計算してみよう。$f'(x)=4-8x$ であり，$\rho(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ とおくと，

$$\lambda=\int_0^1\frac{\log|4-8x|}{\pi\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int_0^{1/2}\frac{\log\{4(1-2x)\}}{\pi\sqrt{x(1-x)}}dx.$$

$x=\sin^2 2\theta$ とおくと，$dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ であるので

$$\begin{aligned}\lambda&=2\int_0^{\pi/4}\frac{\log\{4(1-2\sin^2\theta)\}}{\pi\sin\theta\cos\theta}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\log(4\cos 2\theta)\,d\theta\\&=\log 4+\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\log(\cos 2\theta)\,d\theta\\&=\log 4+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log(\cos\theta')\,d\theta' \qquad (\text{ただし，}\theta'=2\theta)\end{aligned}$$

この最後の積分は $-\log 2$ となり，$\lambda=\log 2$ と求まる。

問 13 $I=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\log(\cos\theta)\,d\theta=-\log 2$ となることを示せ(この積分はオイラーの積分とよばれる)。

リアプノフ数が正という条件は，計算機や，実験・観測より得られる不規則振動波形のカオスの判定条件として最も多く用いられる。そして実際，この条件は，振動波形が不規則であったり，軌道が複雑であることの良い判定条件となっている。

またリアプノフ数は，今まで述べてきた1次元写像ばかりではなく，より一般的な写像や，微分方程式系にも適用される。詳しくは4章で述べるが，これらの場合には，リアプノフ数は一つではなく，一般的に n 変数の系には n 個の組のリアプノフ数$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$が存在する。これらの n 個の値のうち最大の値のものを**最大リアプノフ数**といい，多くの場合，最大リアプノフ数が正ならば，その系はカオスであるといわれる。しかし，たとえ最大リアプノフ数が正であっても，きわめて多次元の場合には，少数次元のような系の複雑さがこの量のみで必ずしも示せるわけではない。また，補足として，位相的エントロピーはリアプノフ数に比べて計算が複雑なために，1次元写像以外での計算例は少ない。

2.9 まとめ

ここでは，いままでに述べたリ・ヨークカオス，位相的エントロピー $h(f)$，リアプノフ数 λ に関して，1次元写像の場合にカオスの存在するための判定条件の点からまとめる。

（1） $h(f)>0$ の必要十分条件は，写像 f が $2^n(2m+1)$ $(n \geqq 0, m \geqq 1)$ 周期をもつことである。

（2） $h(f)>0$ ならば，リ・ヨークの意味の攪拌集合が存在する。すなわち，写像 f はリ・ヨークカオスである。

（3） $\lambda>0$ は，観測されるカオスが存在するための判定条件となる。

（4） $h(f)>0$ は，観測されるカオス，観測されないカオスを含めて，カオスの存在判定条件として用いられる。

（5） $h(f)=0$ のときは，主として非カオス・周期軌道となるが，リ・ヨークカオスの存在する場合もある。

$h(f)>0$ で，$\begin{cases} \lambda<0 \text{ のときは，潜在的カオスが存在する。} \\ \lambda>0 \text{ のときは，観測可能なカオスが存在する。} \end{cases}$

3章

カオスへの道すじ

カオスを生ずる系は，通常，系のパラメターを変化させると，非カオス-カオス間の転位を起こす。このカオスへの移り方には種々あるが，代表的なものとして次の三つが挙げられる。

（1） 逐次**熊手型分岐**(pitchfork bifurcation)をとおしてカオスへ。これは通常**ファイゲンバウム**(Feigenbaum)**の道すじ**(ルート，route)とよばれる。

（2） 逆**接線分岐**(tangent bifurcation)，**間欠性カオス**(intermittercy chaos)をとおしてカオスへ。 ここに到る道すじは，**ポーモー・マネビル**(Pomeau-Manneville)**の道すじ**とよばれる。

（3） **ホップ分岐**(Hopf bifurcation)を繰り返してカオスへ。 これはルエール・ターケンス(Ruelle-Takens)によって主張された道すじである。

このうち，ここでは1次元写像によく登場する(1)，(2)について説明する。

3.1 熊手型分岐とファイゲンバウムの道すじ

さて今まで述べてきたロジスティック写像 $L(x)$ やテント写像 $T(x)$ に，以下2章と同様にパラメターを導入する：

$$T_A(x) \equiv AT(x) = A(1-|2x-1|) \qquad (0<A\leqq 1) \qquad (3\text{-}1)$$

$$L_R(x) \equiv \frac{R}{4}L(x) = Rx(1-x) \qquad (0<R\leqq 4) \qquad (3\text{-}2)$$

このように，R や A を導入した写像 $L_R(x)$, $T_A(x)$ を今までと同様に，ロジスティック写像，テント写像とよぶこととする。また，x の範囲は今までと同じく $[0,1]$ とする。

まずテント写像を考えると，$A<\frac{1}{2}$ の場合は，図 3-1 でわかるように，区間内より出発した軌道はすべて 0 に漸近する。したがって，カオスは生じない。一方，$A>\frac{1}{2}$ の場合には，新たに $x=\frac{2A}{2A+1}$ に不安定な不動点が生じ，同時に $x=0$ も不安定な不動点となる。また，写像の傾きの大きさは 1 以上であり，リアプノフ数は $\log A$ で正であるので，カオスが生ずる。実際，計算機で数値計算を行うと，カオスの特徴である非周期軌道が観測できる(図 3-2)。ただしこの場合，非周期軌道は区間 $[0,1]$ 全体に

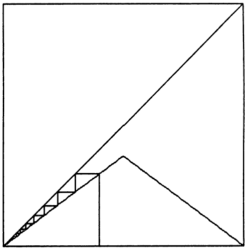


図 3-1 テント写像 $T_A(x)$ の $A<\frac{1}{2}$ の軌道。$x=0$ に漸近する ($A=0.375$)

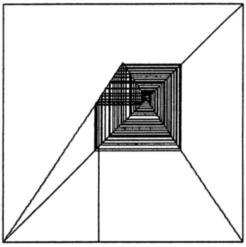


図 3-2 テント写像 $T_A(x)$ の $A>\frac{1}{2}$ のカオス軌道。$[2A(1-A), A]$ の範囲に存在する ($A=0.75$)

広がらず，区間 $[2A(1-A), A]$ 内にある。さらに，$\frac{1}{2}<A<\frac{\sqrt{2}}{2}$ では，この区間内のそのまた一部にあるカオスであり(図 3-3)，$\frac{\sqrt{2}}{2}<A\leqq 1$ ではこの区間全体に広がる(伊藤，田中，仲田，1979)。

問 1　$A>\frac{1}{2}$ のテント写像 $T_A(x)$ において，区間 $(0,1)$ のどの初期値より出発した軌道も，区間 $[2A(1-A), A]$ の間に入ることを示せ。

テント写像は，このようにパラメター A を増加させてゆくと，定常軌道(行きつく先の軌道)は，$A=\frac{1}{2}$ を境に $x=0$ の安定周期軌道からカオスへと突然移り，さらに A を増加させると図 3-3 に示したように，カオスの領域が，区間 $[0,1]$ 全体に広がってゆく。

さて，一方ロジステイック写像(3-2)では，R の増加とともに図 3-4 で示したような種々の定常軌道が表われる。この写像では R が 3～3.57($\fallingdotseq R_\infty$)の範囲で図 3-7 に示すような熊手型分岐が次々現われる。ここで**分岐**とは，安定解がパラメターの値とともに不安定化し，別の種類の安定解が生ずることをいう。数値計算を行うとこの連続した熊手型分岐は無限回起

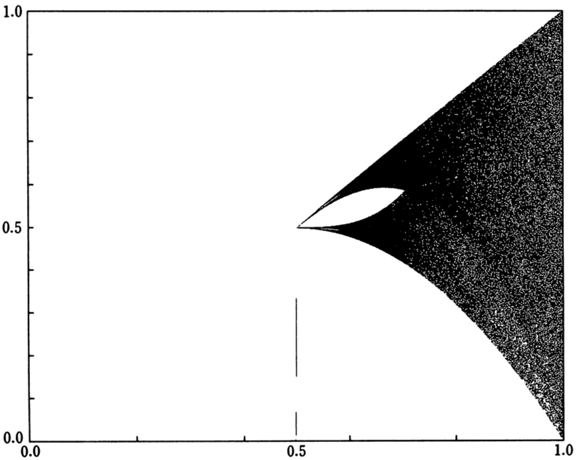


図 3-3　テント写像 $T_A(x)$ の定常軌道

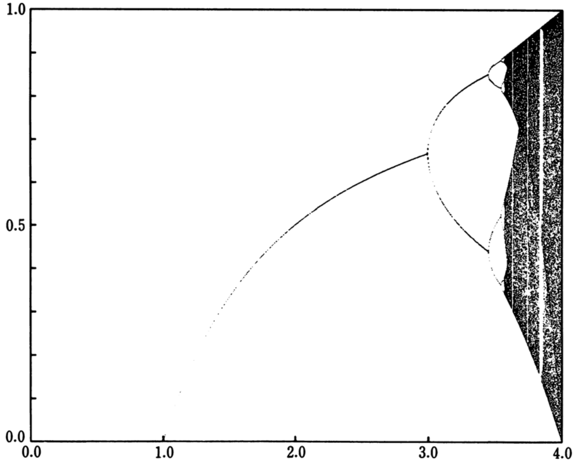


図 3-4　ロジスティック写像 $L_R(x)$ の定常軌道

こり，分岐点はやがて等比級数的に R_∞ に集積することがわかる。ここで，R の増加とともに，安定周期解の周期が $1, 2, 4, 8, \cdots$ と倍々となる。これを**周期倍化**(period doubling)**現象**とよぶ。そして $R>R_\infty$ でカオスの領域が存在する。

$R>R_\infty$ においては，軌道が x のある範囲に分布し，カオスであることがわかるが，R のある範囲はカオスが存在せず，ここを**窓**という。テント写像では見られないこれらロジスティック写像の多彩な様相は，頂点が角ばっておらず滑らかであること，および曲線全体が上に凸であるという性質によっているが，これらについては 3.2 節，3.3 節において詳しく述べる。

以下，ロジスティック写像における熊手型分岐と周期倍化現象を説明する。

パラメターR を順次大きくしていった場合を考える。

（1）　$R<1$ の場合：　写像が 45°の対角線と交わる点(不動点)は $x=0$ のみであり，これは安定で，$[0,1]$ のすべての初期値より出発した軌道はすべて $x=0$ の点に向う。これはテント写像において $A<\frac{1}{2}$ の場合と同様である(図 3-5)。

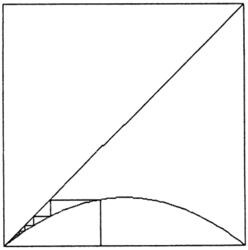


図 3-5 ロジスティック写像 $L_R(x)$ の $R<1$ の場合の軌道。$x=0$ に漸近する $(R=0.8)$

（2） $1<R<3$ の場合： 不動点は，$L_R(x)=x$ を解いて，$x_0=0$，$x_1=1-\dfrac{1}{R}$ の二つであり，それらの点の安定性は $|f'(x_0)|=R>1$ であるから x_0 は不安定，x_1 は安定となり，実際，軌道は x_1 に漸近する（図 3-6）。すなわち，$R=R_0=1$ で分岐が起きている。この分岐は後の熊手型分岐と同様の機構である。

（3） $3(=R_1)<R<1+\sqrt{6}\,(=R_2)$ の場合： $|L_R'(x_1)|>1$ であるので，不動点 x_1 は不安定化する。このとき図 3-7 に示すように不安定化した x_1 の両側に，安定な 2 周期点 x_{2-}，x_{2+} が現われる。これが熊手型分岐で，分岐点は $R=3$ である。この x_{2-}，x_{2+} は 2 回写像の不動点 $L_R^2(x)=x$ の解を求めることにより求まる。

$$L_R^2(x)-x=-x\{Rx-(R-1)\}\{R^2x^2-R(R+1)x+(R+1)\}=0$$

であるので，x_0, x_1 以外に解

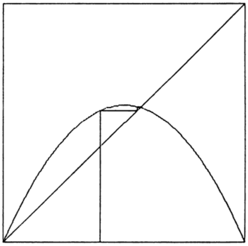


図 3-6 ロジスティック写像 $L_R(x)$ の $1<R<3$ の場合の軌道。$x=1-\dfrac{1}{R}$ に漸近する $(R=2.3)$

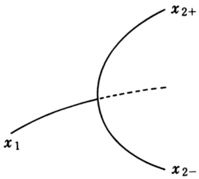


図 3-7　熊手型分岐。実線は安定軌道，点線は不安定軌道。安定軌道が定常軌道として観測される。

$$x_{2\pm}=\frac{R+1\pm\sqrt{(R+1)(R-3)}}{2R} \tag{3-3}$$

が現われる。これらの根は $R_1<R<R_2$ の範囲で安定である。なぜなら，

$$\frac{d}{dx}L_R^2(x)=\frac{d}{dx}L_R(L_R(x))=\frac{dL_R(L_R(x))}{dL_R(x)}\cdot\frac{dL_R(x)}{dx}$$

であるので，$x=x_{2+}$ とすれば $L_R(x_{2+})=x_{2-}$ より，

$$(L_R^2)'(x_{2+})=L_R'(x_{2+})\,L_R'(x_{2-})$$

となる。同様に，$L_R(x_{2-})=x_{2+}$ を用いて，

$$\begin{aligned}(L_R^2)'(x_{2-})&=L_R'(x_{2+})=L_R'(x_{2+})\,L_R'(x_{2-})=R^2(1-2x_{2+})(1-2x_{2-})\\&=(L_R^2)'(x_{2+})=-R^2+2R+4\end{aligned}$$

となる。これは $3<R<1+\sqrt{6}$ で絶対値が 1 より小さい。

問 2　上の不等式を確かめよ。

（4）　$R>R_2=1+\sqrt{6}$ の場合：　x_{2+}，x_{2-} は不安定となり，安定な 4 周期解が表われる。分岐点 $R=R_2=1+\sqrt{6}$ で

$$(L_R^2)'(x_{2+})=L_R^2(x_{2-})=-1$$

であり，x_{2+}, x_{2-} は同時に不安定化し，$R>1+\sqrt{6}$ で x_{2+}, x_{2-} の近くに安定な解を各々二つずつ生ずる。ここでの 2 回写像 $L_R^2(x)$ の x_{2-}, x_{2+} の近傍での変化の仕方は，$R=3$ で x_1 が不安定化し x_{2-}, x_{2+} が生じた場合の $L_R(x)$ の振舞いと同じである（図3-8）。$R>1+\sqrt{6}$ の場合の安定 4 周期点は，4 回写像 $L_R^4(x)$ の不動点を考えればわかる。ただし，これらの 4 周期点を代数的に求めることはできない。なぜなら，4 周期点を与える式は $L_R^4(x)-x=0$ で，これは x の $2^4=16$ 次式であり，今までわかっている

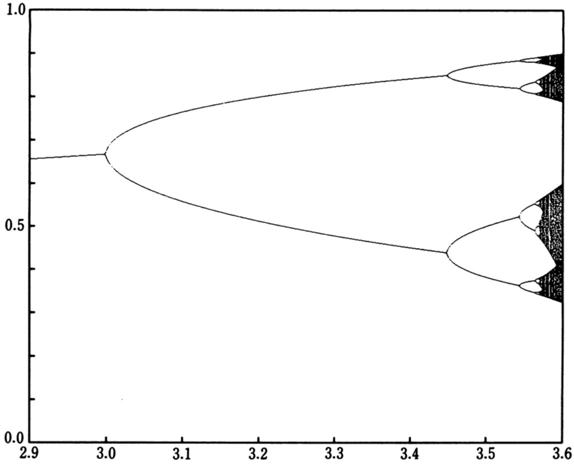


図 3-8 ロジスティック写像の熊手型分岐の存在する範囲。$R_\infty=3.5699456\cdots$よりカオス領域となる。

解 $x_0, x_1, x_{2\pm}$ の分を引いても残りは 12 次式であり，もはや解の公式により解くことはできないのである。図 3-9 に写像上の 2, 4, 8, 16 周期を示す。

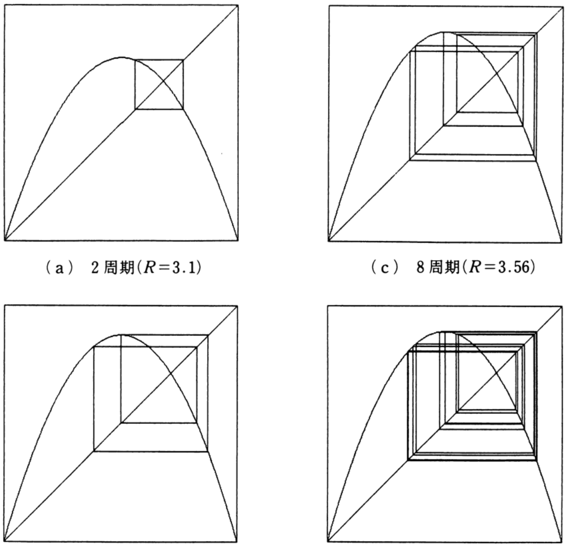
問 3 x の多項式 $L_R^4(x)-x$ は，$L_R^2(x)-x$ と $L_R(x)-x$ を因数にもつことを示せ。

さらに R を増やしてゆくと $R=R_n$ で 2^n 周期点が不安定化し，2^{n+1} 周期の安定周期点が熊手型分岐により現われる。

ここで，R_n の並びの間隔は，図 3-8 に示したように，n が大きくなるにつれ等比数列的に間隔が小さくなってゆく。その公比を $\dfrac{1}{\delta}$ とおく。これはファイゲンバウム(M. J. Feigenbaum)によって研究され，

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\frac{R_n-R_{n-1}}{R_{n+1}-R_n}=4.669201609\cdots \tag{3-4}$$

となる。この δ を**ファイゲンバウム定数**という。R_n の極限は数値計算により $R_\infty=3.5699456\cdots$ である。また，R_n の並びをみるために，図 3-8 を横軸 $-\log(R_\infty-R)$ でとると図 3-10 のようになり，n の小さな分岐点からほぼ等間隔に並んでいることがわかる。(3-4)の δ は数値計算により求



(a) 2 周期($R=3.1$)　(c) 8 周期($R=3.56$)

(b) 4 周期($R=3.5$)　(d) 16 周期($R=3.5685$)

図 3-9　ロジスティック写像上の周期点

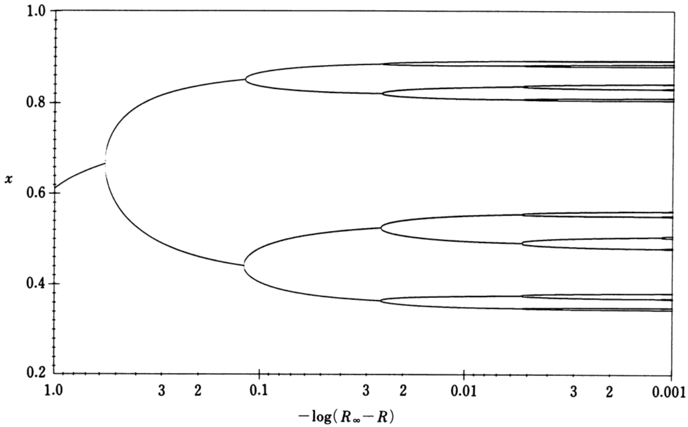


図 3-10　熊手型分岐を $R_\infty - R$ に対して対数尺でプロット

まったものであり，大きな n に対する漸近的な値であるが，ここでは n の小さな分岐より δ を概算してみる。分岐点としては R_0, R_1, R_2 を用いる。ここで R_2 は $x=0$ の安定解の分岐点で，熊手型分岐とはいいにくいが，$x_{n+1}=x_n$ の対角線に接し不安定化する機構は，本質的に熊手型分岐と考えられる。これらの分岐点より

$$\delta_1=\frac{R_1-R_0}{R_2-R_1}=\frac{3-1}{(1+\sqrt{6})-3}\doteqdot 4.45 \tag{3-5}$$

となり，正しい δ にきわめて近いのに驚く。

また，かりにこの比で R_∞ へ分岐点が集積していった場合には

$$\begin{aligned}R_\infty-R_1&=(R_\infty-R_2)+(R_2-R_1)=\cdots\\&=(R_2-R_1)+(R_3-R_2)+(R_4-R_3)+\cdots\\&=(R_2-R_1)\left\{1+\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{{\delta_1}^2}+\cdots\right\}=(R_2-R_1)\frac{\delta_1}{\delta_1-1}.\end{aligned}$$

これより，

$$R_\infty=R_1+(R_2-R_1)\frac{\delta_1}{\delta_1-1}=3.580 \tag{3-6}$$

となり，これは上に述べた，数値計算の実際の値

$$R_\infty=3.5699456\cdots$$

とかなり近い。すなわち，これでわかることは，このロジスティック写像の場合には，かなり n の低い分岐点からファイゲンバウムの定数 δ による等比数列に近い間隔で並んでいるということである。なお，より一般的な連続写像

$$x_{n+1}=R\,f(x_n) \tag{3-7}$$

においても，$f(x_n)$ が単峰(1つの山をもつこと)で，頂点近くが2次曲線的（$f''(x)\neq 0$）でありかつ，後述するシュワルツ(Schwarz)条件を満足するならば，(3-4)で示される定数 δ の逆数の公比で分岐点が等比数列状に R_∞ に集積するのである。

さらに，このファイゲンバウムの道すじに特有な事実がある。それは頂点付近の曲線の形が写像の回数を重ねると，相似的に縮小しながらある一定の曲線 $g(x)$ に近づいてゆくことである(図3-11)。このことを式で書けば

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f^{2^n}_{R_{n+1}}\left[\frac{x'}{(-\alpha)^n}\right]=g(x') \tag{3-8}$$

となる。ただし，$x'=x-\dfrac{1}{2}$ である。ここで

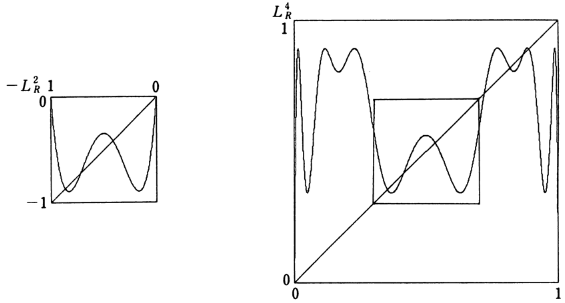


図 3-11 $-L_R^2(x)$ $(R=3)$と$L_R^4(x)$$(R=3.44949)$のグラフ。$-L_R^2(x)$のグラフは1/2.5に縮小してある。$L_R^4(x)$の中央部と$-L_R^2(x)$がよく似ている。

$$g(x')=1-1.52763x'^2+0.104815x'^4-0.0267057x'^6+\cdots, \qquad (3\text{-}9)$$

また，

$$\alpha=2.502807876\cdots$$

である。このαの値を，低次の分岐よりどの程度概算できるか試してみると

$$\frac{x_0-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}-x_{2-}}=\left.\frac{\left(1-\dfrac{1}{R}\right)-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{R-1-\sqrt{(R+1)(R-3)}}{2R}}\right|_{R=R_\infty}=2.557\cdots \qquad (3\text{-}10)$$

となり，低次の相次比にしては，真のαに近い値が得られる。

問 4 $g(x)$が(3-9)で与えられているとき

$$g(x)=Tg(x)\equiv-\alpha g\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right] \qquad (3\text{-}11)$$

が成立することを$x=0$の場合について調べよ。

問 5 (3-11)において，$g(x)=1+Ax^2$とおき，αの近似値を求めよ。

いままで述べたような無限に続く熊手型分岐に基づくファイゲンバウムのカオスへの道すじは，前述したように広い範囲の写像に存在する。その例として，図3-12に$x_{n+1}=A\sin(\pi x_n)$の写像の場合を示す。Aを変化させた場合の軌道の様子はロジスティック写像の場合と非常によく似ている。

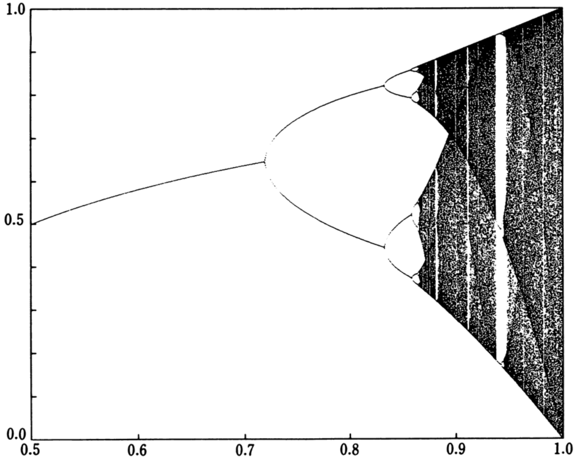


図 **3-12**　写像 $x_{n+1}=A\sin(\pi x_n)$

3.2　熊手型分岐の条件

3.1 節で述べた，(1) 無限に続く熊手型分岐と，(2) ファイゲンバウム比 δ が生ずる写像 $f(x)$ の条件を考察する。

(2)のほうより説明する。高次写像 $L_R^n(x)$ $(n\gg 1)$の頂点分布の形で，高次分岐が定まる。なぜなら，$\tilde{x}=\dfrac{x'}{(-\alpha)^n}$ の値は，x' が 0 を中心に $-\dfrac{1}{2}\sim\dfrac{1}{2}$ まで変化しても $\tilde{x}$ は 0 に近い値しかとらず，$f(x)$ がロジスティック写像と同様の単峰写像であり，頂点付近で 2 次関数的要素があれば($f''(0)\neq 0$)，(3-4)が成立することがわかっているからである。

次に(1)に関してであるが，まず熊手型分岐の生ずる条件を考えてみよう。2 周期点が不安定化するのは安定 4 周期点が生ずる R_2 であり，$4=2^2$ 周期点が不安定化するのは R_3 である。一般に 2^n 個の安定周期点が不安定化するのは $R=R_{n+1}$ である。3.1 節で述べた $R=R_2$ の場合と同様にして

$$(L_{R_{n+1}}^{2n})'(x_k)=-1 \qquad (k=1, 2, \cdots, 2^n) \tag{3-12}$$

である。ここで x_k は，k 番目の不安定化する $L_{R_{n+1}}^{2n}(x)=x$ の不動点である(図 3-13 参照)。

問 6 $R_n<R<R_{n+1}$ において $L_R^{2n}(x)=x$ の不動点は 2^{n+1} 個あり，そのうち 2^n 個が安定な不動点，残りの 2^n 個が不安定な不動点である。これを数学的帰納法で示せ。

$L_{R_n}^{2n}(x)=f_R(x)$，$L_{R_n}^{2n+1}(x)=f_R(f_R(x))=g_R(x)$ とおく。$f_R'(x_k)=-1$ より

$$g'(x_k)=\frac{df^2(x)}{df(x)}\frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_k}=(f'(x_k))^2=1$$

$$(\because\quad f(x_k)=x_k)\qquad\qquad (3\text{-}13)$$

$$g''(x_k)=\left\{\frac{d^2f^2(x)}{df(x)}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2+\frac{df^2(x)}{df(x)}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right\}\bigg|_{x=x_k}=0$$

である。ここで，$f=f_R$，$g=g_R$ である。したがって，$g_R'''(x_k)<0$ であれば，$y=g_R(x)$ は $y=x$ と $x=x_k$ で図 3-14(a)のように 3 次の接触をする。

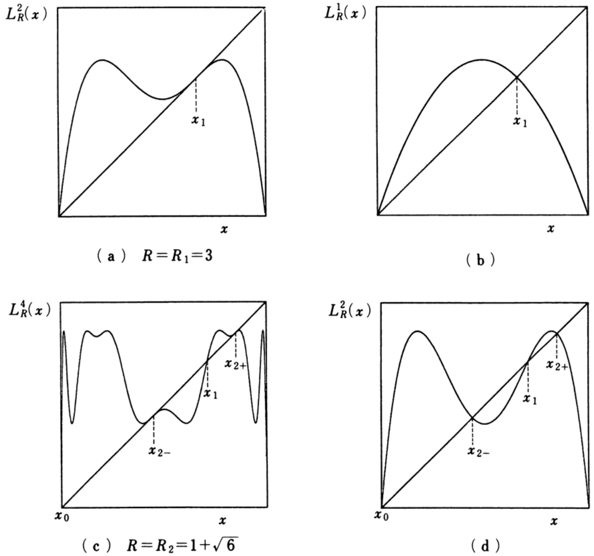


図 3-13 1 周期点 $x=x_1$ の不安定化点 $R=R_1$ における，(a) $L_R^2(x)$ と，(b) $L_R^1(x)$．2 周期点 x_{2+}, x_{2-} の不安定化点 $R=R_2$ における，(c) $L_R^4(x)$ と，(d) $L_R^2(x)$．

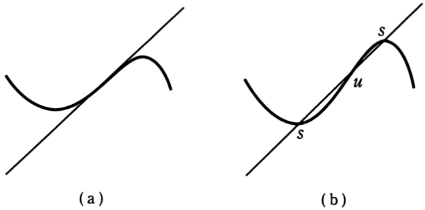


図 3-14　熊手型分岐の出発点(a)と，不安定点(u)と安定点(s)の対の発生(b)

一般に，$R>R_n$ 場合は $g'(x_k)>1$ となるので，図 3-14(b)のように $x=x_k$ の両側に二つの実根が生ずる。すなわち，根 $x=x_k$ が不安定となり，両側の新たな二根が安定であり，$R=R_n$ で熊手型分岐が発生する。したがって，重要なことは $g'''(x_k)<0$ ということである。ここに述べたことを式で示す。$y=x-x_k$ とおくと，$R>R_n$ で不動点を求める方程式は

$$g_R(x)-x=\frac{1}{3!}g_R'''(x_k)y^3+\frac{1}{2!}g_R''(x_k)y^2+(g_R'(x_k)-1)y=0 \tag{3-14}$$

となり，根 $y=0$ の他に

$$\frac{1}{3!}g_R'''(x_k)\,y^2+\frac{1}{2!}g_R''(x_k)\,y+g_R'(x_k)-1=0$$

の根がある。判別式

$$D=\frac{1}{4}(g_R''(x_k))^2-\frac{2}{3}g_R'''(x_k)(g_R'(x_k)-1)$$

は，$R=R_n+\delta R$ とおいて

$$D=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{R_n}''(x_k)}{\partial R}\right)^2(\delta R)^2-\frac{2}{3}g_{R_n}'''(x_k)\left(\frac{\partial g_{R_n}'(x_k)}{\partial R}\right)\delta R \tag{3-15}$$

となり，通常，$\dfrac{\partial g_{R_n}'(x_k)}{\partial R}>0$ であるので，$g_R'''(x_k)<0$ ならば $D>0$ となり，2 実根を有する。

したがって，ここで熊手型分岐を無限に起こすのに必要な条件としては，$R=R_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ において

$$g_{R_n}'''(x_k)<0$$

であることである。なお，$g_{R_n}''(x_k)=0$ であるので，実は，これは次の**シュワルツ**(Schwarz)**微分**が負となることと同等である。すなわち，ある関

数 f のシュワルツ微分 $S[f]$ とは

$$S[f]\equiv\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \tag{3-16}$$

で与えられる。また，シュワルツ微分は次の性質をもつ：

もし，$S[f]<0$ ならば，$S[f^n]<0$ である。

問 7 これを示すために次の式を導びけ：

$$S[f^n]_{x=x}=\left(\frac{df^{n-1}}{dx}\right)^2 S[f]_{x=f^{n-1}(x)}+S[f^{n-1}]_{x=x}$$

分岐点においては，上に述べたように $f_{Rn}{}'(x_k)=-1$，$(f_{Rn}^2(x_k))'=1$ であるので

$$S[f^2]=(f^2)'''$$

となる。そこで上に述べたことと合わせて考えると，x の定義域 I で

$$S[f]<0$$

であれば，熊手型分岐で無限回生ずることがわかる。例えば，f をロジスティック写像 $L_R(x)$ とすると，$f'''=0$，$f''=-2R$ より，$S[f]=-\dfrac{3}{2x^2}<0$ である。

問 8 次の関数のシュワルツ微分を求めよ。

（1） $f(x)=x^n$ （2） $f(x)=A(1-|1-2x|^p)$

問 9 次の式を示せ： $S[f]=-2\sqrt{f'}\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{f'}}\right)$

ファイゲンバウムの道すじは，多くの頂点の丸い 1 次元写像において観測されている。しかし，シュワルツ条件を満たさないテント写像などは熊手型分岐も観測されない。また，単峰的な写像 f の頂点 $x=x_0$ の近くが 2 次曲線的でなく，$f''(x_0)=0$ なら，無限の熊手型分岐が観測されても，(3-4) で定義される隣り合う分岐点間の距離の比 δ はこの値とならず，$f''''(x_0)\neq 0$ ならば頂点は 4 次関数的となり，$\delta=7.285\cdots$ となる。

図 3-15 には写像 $x_{n+1}=A(1-|1-2x_n|^p)$ の n が 200 以上の点を示してある。$p>1$ の場合は，熊手型分岐や窓が観測されるが，これは $p>1$ において，シュワルツ微分が負であること (問 8 参照)，および頂点付近が平坦であることによる。$p=2$ と $p=4$ の場合を比較すると，$p=4$ の場合のほうが A の増加とともに，分岐点の間隔が急に小さくなってゆくことがわ

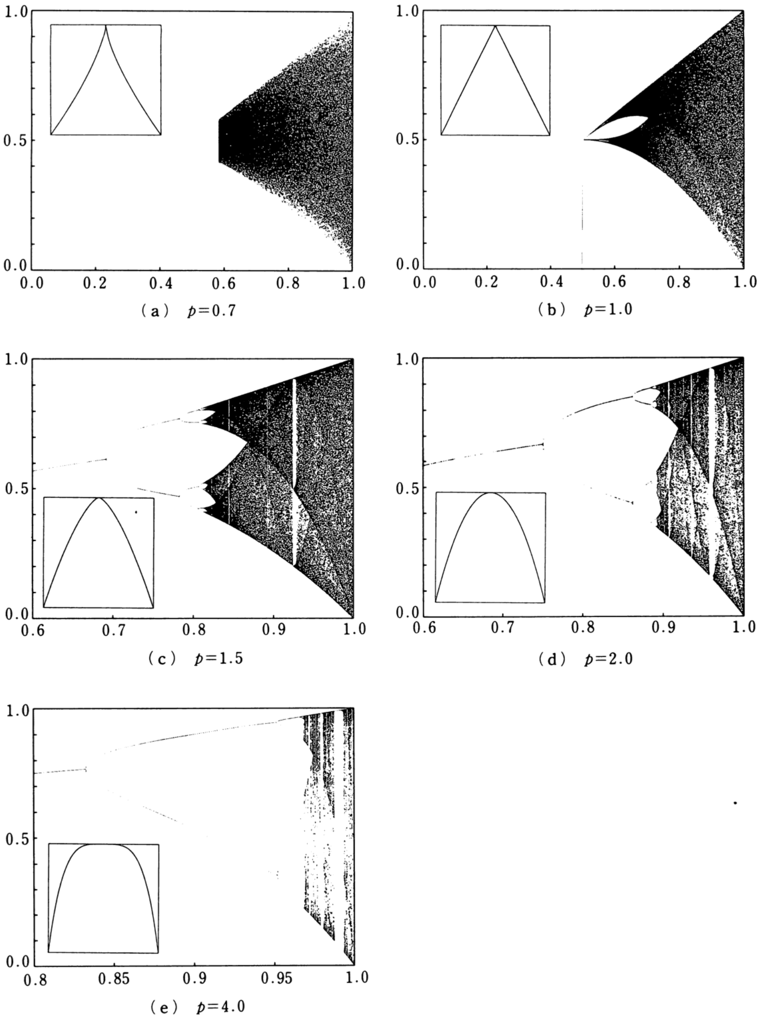


図 3-15 写像 $x_{n+1}=A(1-|1-2x|^p)$ における定常軌道。横軸は A

かる。$p=2, 4, 6, 8$ の場合の式(3-4)の δ の計算機による結果を表 3-1 に示す。

さて，ここで述べた周期倍化現象をとおしてカオスへ到る道すじは，カオス発生の際の典型的な道すじであり，実験的にも数多く観測されている。その一例としてレーザーにおける観測結果を図 3-16 に示す。この実験はキセノンレーザーのキャビティ間の長さを微調しながら，レーザー光が振幅変調されるようすを測定したもので，その振幅変調の周波数に対し，その周波数の光の成分の強度を対数尺で縦軸にとったものである。図(a)～(c)において，いちばん低い基本周波数が $f \to f/2 \to f/4$ と変化し，周期 T は $T=1/f$ の関係より，2 倍，4 倍と倍化していることがわかる。

表 3-1 $x_{n+1}=A\left\{-\left(x_n-\dfrac{1}{2}\right)^p+\dfrac{1}{2^p}\right\}$ における p と δ の値

p	2	4	6	8
δ	4.669	7.285	9.296	10.948

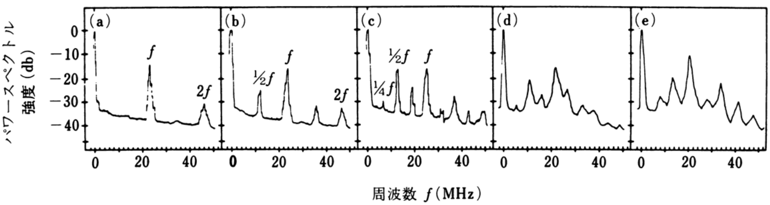


図 3-16 レーザー発振において観測された周期倍化現象(a)～(c)とカオス(d)と 3 周期の振舞いをする場合(e).
[R. S. Gioggia and N. B. Abraham : Phys. Rev. Lett. **22**(1983)650 より]

3.3 窓

ロジスティック写像の，パラメター R に対する軌道(漸近軌道)の分布図(図 3-17)を見ると，R_∞(=3.5699456)<R<4 の領域中で，カオス的に点が広がっておらず，周期軌道が存在する領域がある。これを**窓**という。最も大きな窓は $R \sim 3.84$ のあたりの，3 周期の安定周期軌道を有する窓で，これを**3 周期の窓**という。一般に窓中の状態は，ほとんどあらゆる初期値より出発した軌道は，周期軌道に漸近する。「ほとんどあらゆる」という意味は，例えば 3 周期の窓においては，リ・ヨークの意味で周期軌道に漸近しない初期値が非可算無限個あるわけであるが，この非周期軌道は通常観測されない(測度 0 の点で周期軌道に漸近しない)。

窓は無限(可算)個存在し，かつ幅をもっている。3 周期の窓は上に述べたもの一つであるが，4 周期の窓はどこにいくつあるだろうか？　答は，$R \sim 3.962$ 付近に一つだけ存在する。また，すべての窓の幅を合計すると，R_∞ と 4 の間の約 10% 位であることも数値計算により知られている。

さて，最大の大きさの窓である 3 周期の窓は，$R=1+\sqrt{8}=3.8284271\cdots$ より始まる(この値の出し方は付録 3A に示す。)。この R の値で 3 回写像

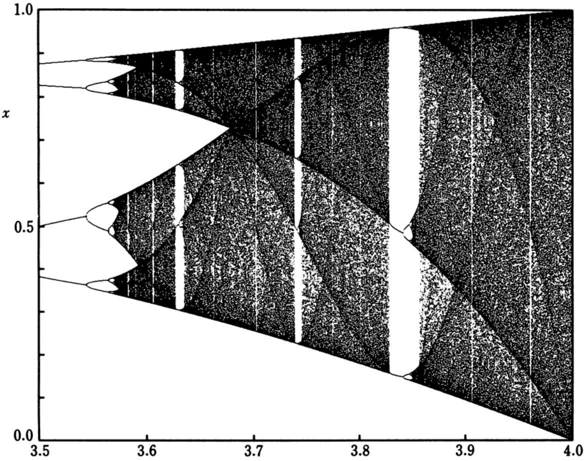


図 3-17　ロジスティック写像 $L_R(x)$ における窓の分布

のグラフ $L_R^3(x)$ を描いてみると，図 3-18(a)のようになり，三点 α, β, γ で 45° の直線と接していることがわかる。この $R_c=1+\sqrt{8}$ よりも少し R を増加させると，三つの重根(重複解)は分れて，それぞれが二実根となり，これらの二実根のうち，一方は安定周期点であり，他方は不安定周期点である(図 3-18(b))。(図では＋が安定周期点，－が不安定周期点である。)

問 10　ある R の値で，三つの根 α, β, γ の一つのみが重根となることはなく，必ず三つ同時に重根となることを示せ。

この安定周期点が，ほとんどあらゆる軌道を引きつける。さてこのように 45°の線に接した後，安定・不安定周期点が対になって生ずることを，**接線分岐**(tangent bifurcation)という。これは，この 3 周期の窓の場合ばかりではなく，あらゆる周期の窓が接線分岐により生ずる。分岐でできた安定周期点は，窓中で熊手形分岐を連続して起こし，窓中で“小さなカオス”を生ずる。この小さなカオスは図 3-17 の拡大図を見ればわかるとおり，ロジスティック写像の定常軌道の $0<R\leqq 4$ の全体を縮小したものになっている。そこでこの小さなカオスの中にも当然 3 周期の窓に対応する窓(実際は 3×3 で 9 週期の窓)が存在し，またこの窓の中にさらに小さなカオス，その中にまた小さな窓と恐るべき相似構造が存在しているのである。

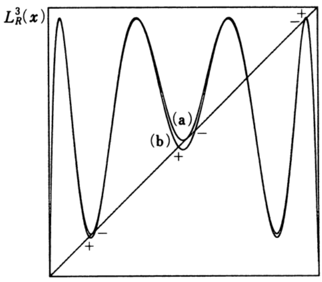


図 3-18　ロジスティック写像の 3 回写像 $L_R^3(x)$ のグラフ。
(a) 3 周期の窓の始まり($R=1+\sqrt{8}=3.8284271\cdots$),
(b) 窓中の安定不動点(＋)と不安定不動点(－)
($R=3.84500$)

窓中の周期軌道に関しては，$\frac{1}{2}$を通るものがあり，これを**超安定軌道**(superstable orbit)という。この軌道の写像拡大率はゼロとなり，リアプノフ数は$-\infty$となる。3周期の窓を例にとり，超安定周期を考えてみよう。超安定周期を与えるRの値は，Rの方程式$L_R^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$の解である。具体的に書くと，

$$R^7-8R^6+16R^5+16R^4-64R^3+128=0 \tag{3-17}$$

である。

問 11 (3-17)を導びけ。

$R=2$の場合は，頂点を通る1周期軌道が存在するので，(3-17)は$(R-2)$を因数にもつ。この因数で割った商は，

$$R^6-6R^5+4R^4+24R^3-16R^2-32R-64=0$$

である。この式は簡単な根をもたず因数分解できない。しかしポケットコンピューターなどを利用してニュートン(Newton)法で解くと，容易に3周期の窓中の超安定周期が求まり，その根R_Sは

$$R_S=3.831874055\cdots$$

となる。この値は窓の位置を示す代表値として使える。

このような高次多項式を解く手段としてニュートン法は非常に強力であるので，その原理とポケットコンピューター用プログラムを付録3Bに示しておく。

次に，3周期の窓の大きさや，その内での小さなカオスの広がりなどを概算してみる。この計算により，カオスの相似性に対する勘を養うことができる。

$L_R^3(x)$を$x=\frac{1}{2}+x'$とおき，$x'=0$のまわりで展開し，x'の2次の項までとると

$$L_R^3(x)\sim\frac{R^3}{256}\{(16R^4-96R^3+128R^2+128R-256)x'^2$$
$$-R^4+8R^3-16R^2-16R+64\} \tag{3-18}$$

となり，これは$L_R^3(x)$の$x=\frac{1}{2}$付近の極小点をxの2次関数で近似したものとなっている。これに超安定周期のRの値R_Sを代入すると

$$35.63x'^2+0.50$$

となる。すなわち，この放物線の“大きさ”は，1回写像 $L_R(x)=-Rx'^2+\frac{R}{4}$ と比較すると，$R=4$ における約 $\frac{1}{9}\left(\fallingdotseq\frac{4}{35.63}\right)$ となっていることがわかる（$y=f(x)$ と $ay=f(ax)$ のグラフの相似比は，$1:\frac{1}{a}$ であることに注意）。したがって，窓中の小さなカオスのうち，中央の小さなカオスの広がりの大きさは $\frac{1}{9}\fallingdotseq0.1$ 程度と概算でき，これは実測とよく一致する（図3-19）。

また，窓の終るところでは，この小さな放物線におけるカオスが $\frac{1}{9}$ の幅全体に広がり，それ以上極小点が下がると，カオスがこの幅を飛び出して全体に出てしまう現象，**クライシス**（crisis）が存在する（図3-20）。このクライシスの起こる（窓の終る）R の値は，3回写像の $x'=0\left(x=\frac{1}{2}\right)$ 付近の様相と1回写像との近似的相似性により概算される。すなわち，クライシスの起こる場合の極小点の高さは $\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$ と考えられるので，

$$\frac{R^3}{256}(-R^4+8R^3-16R^2-16R+64)=\frac{4}{9}$$

とおき，この解をニュートン法で求めると $R_0=3.857082826\cdots$ と求まる。これより，窓の大きさは $R_0-R_c=0.0287$ となり，この値は実測とかなり良く一致する。

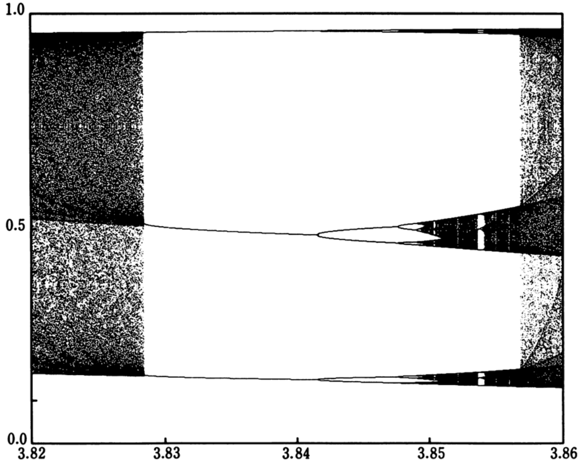


図 3-19 図3-18に対する3周期窓中の定常軌道の拡大図

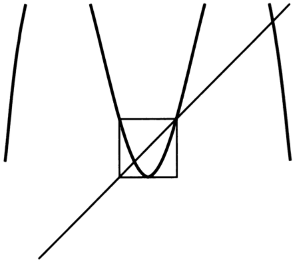


図 3-20 3周期の窓の終りの $L_R^3(x)$．これより R が大きいと頂点が枠よりはみ出し，カオスが全体に広がり(クライシス)，窓が終る。

一般的に，頂点付近が $A(R)x'^2+B(R)$ の放物線で近似できる場合には，上の議論より，カオス領域の最大幅が $\dfrac{4}{A(R)}$ 程度であり，この半分程度頂点が移動するときの R の変化分 $\varDelta R$ は

$$B'(R)\varDelta R=\frac{2}{A(R)}$$

より，

$$|\varDelta R|=\left|\frac{2}{A(R)B'(R)}\right|$$

が大ざっぱな窓の大きさとなる。

窓はいったいどのくらいの数あるのであろうか？　3周期の窓は，$R\sim3.84$ あたりの大きな窓一つである。4周期の窓の位置と個数は？　答は $R\sim3.962$ 付近にただ一つ存在する。5周期の窓の個数は？　実は3個存在する。その位置は R の多項式 $L_R^2\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ をニュートン法で解くことにより，$R=3.73892\cdots$，$3.90571\cdots$，$3.99027\cdots$ 付近である(付録3B)。この三つのうち最初のものは図3-17において大きく見えるが，次のものはかろうじてわかり，3番目のものはこの図では見えない。窓は一般に $R=4$ に近づくに従って小さくなる。

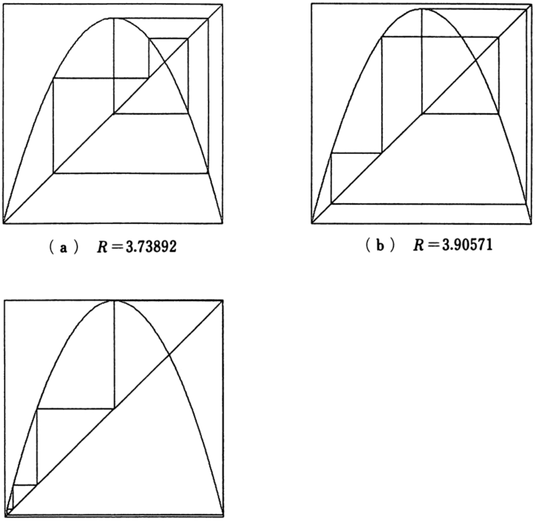
3個の5周期の窓はなぜ，各々このような違った場所に存在するのか，またこのことまで含めて窓を特徴づけるものは何か？　それは窓中に存在する超安定周期軌道である。というのは，超安定周期軌道はリアプノフ数が負(実は負の無限大)であり，この軌道を与える R の値の近傍も安定周期解が存在し，この範囲が窓となるからである。さて，3個の5周期の窓中の超安定周期軌道を R の小さい方より順に図示すると，図3-21(a)，

(b), (c)のようになる。これはまた位相的エントロピーの順でもあり，その値はそれぞれ

$$\log 1.51288, \qquad \log 1.72208, \qquad \log 1.92756$$

である。なお，超安定周期の位相的エントロピーの求め方は付録3Cに示す。

窓の数は $R=4$ の周期軌道の数より求めることができる。例えば，3個の5周期の窓では，接線分岐により安定・不安定合わせて計 $5\times2\times3=30$ 個の周期軌道が発生し，その周期軌道が $R=4$ まで保存されるので，2章で述べたように，$R=4$ でやはり5周期の周期軌道は $2^5-2=30$ 個存在する。したがって，R の増加とともに周期軌道が途中で消滅しないとすると(ロジスティック写像では保証されている)，$R=4$ の周期軌道の個数を用いて窓の数を計算することができる。



(a) $R=3.73892$ (b) $R=3.90571$ (c) $R=3.99027$

図 3-21 5周期の窓中の超安定周期軌道。(a), (b), (c)の順に R の増加とともに並んでいる。これらの順は位相的エントロピーの増加の順でもある(付録3C参照)。

p が奇数のとき，p 周期軌道は熊手型分岐では発生し得ず，接線分岐のみで発生する。特に p が素数のとき，その個数 2^p-2 個を $2p$ で割った $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ が窓の個数となる。フェルマー(P. Fermat)の定理により，p が 3 以上の素数のとき，2^{p-1} は p で割り切れる。

問 12 $p=3, 5, 11, 23$ の場合の窓の個数を求めよ。

k 周期の窓の個数の概数は，k が大きな場合には $\dfrac{2^{k-1}}{k}$ 個程度であり，例えば $k=50$ の場合には，この数は 1.12×10^{13} 個と膨大な数となる。

最後に窓はどのような写像に対して存在するのであろうか？　この答は今まで窓を論じてきたことで明らかとなっていることであるが，接線分岐を起こす局所的な‘放物線’の先端の曲率が大きければ窓は小さくなる。この極限としてのテント写像には窓が存在しない。また別の言い方をすれば，窓は R の変化に対して超安定周期の近傍でリアプノフ数が負になる部分である。この部分が存在するためには，先に平坦部分のあるロジスティック写像のような写像でなければならない。

さて，今まで論じてきた窓の性質は次のことを問いかけていることに注意しよう。すなわち窓中には周期軌道のみでカオスはないようにみえる。しかしながら，3 周期の窓には 3 周期軌道が存在し，少なくともリ・ヨークの意味でのカオス(攪拌集合)は存在しなければならない。この観測されないカオスとはどのようなものであろうか？　計算機ではとらえられないが非可算無限個の測度 0 のカオス軌道点が存在することになる。このような集合の例としてはカントール集合が有名であるが，実際に窓中において周期点以外のある初期値より出発すると，不規則に振舞いながら，やがて，周期点に落ち込むのがみられる。この落ち込むまでの繰返し数はこの初期値に敏感に依存している。この計算機による試みはもちろんその計算の精度内での話であるが，この現象は窓の中に複雑な構造が存在することを暗示しているものである。実際に 3 周期の窓中の超安定周期が存在する R の値 $R=3.8318740\cdots$ において，逆写像を用いて求めたカオスの不変測度を図 3-22 に示す。このようなカオスは不安定であり，安定 3 周期に落ち着くまでの過渡現象にその根跡が見られる(図 3-23)。

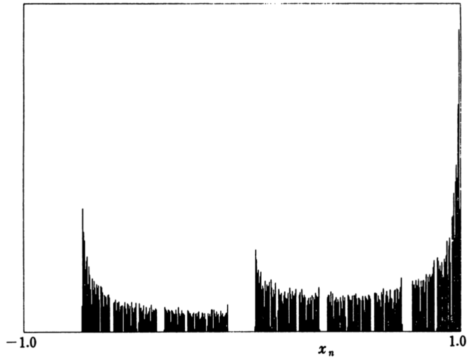


図 3-22 ロジスティック写像の3周期窓中のカオスの不変測度。全体として不安定のため逆写像により求めた。この計算に用いた写像は $x_{n-1}=1-ax_n^2$, $a=1.75487767$ である。この写像を，$x_n=Rx_n(1-x_n)$の形に変換すると，$R=3.83187\cdots$(図 3-23 と同じ)に対応。[H. Kantz and P. Grassberger : Physica **17D**(1985)75 より]

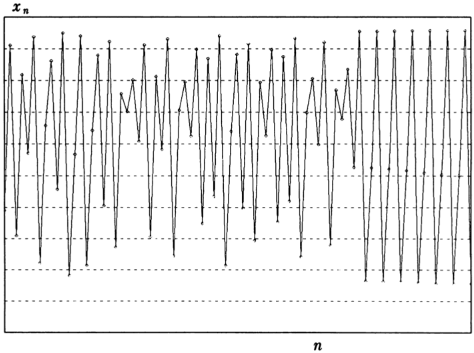


図 3-23 3周期の窓中の過渡的不規則軌道 ($R=3.831874055$, $x_0=0.39$)。x_0 を変えると，不規則の部分の長さは大きく変化する。

3.4 間欠性カオス

間欠性カオスは，窓のすぐ手前に存在する。ここで，パラメター R を窓の部分より小さくし，接線分岐を逆にたどることにする。ロジスティック写像の 3 周期の窓の出発点 $R=R_c=1+\sqrt{8}$ の少し手前の様子をみるため，$R=1+\sqrt{8}-\delta$ とおき，$\delta=0.0001$ にとったときのカオスの例を図 3-24 に示す。この図でわかるように軌道は 3 周期的部分と全体に広がった部分よりなる。前者を**ラミナー**(laminar)，後者を**バースト**(burst)とよぶ(ラミナーとは層流の意味で，静かな部分，バーストとは破裂するごとく変化する意味である)。ラミナーは，写像の一部が 45°の直線 $x_{n+1}=x_n$ に近いためにここを通過するのに多くの回数がかかるが，x_n の値は多数回写像を行っても変らないことにより生ずる(図 3-25)。バーストはこのラミナー部を脱出した軌道が全体に広がるために生ずる。ラミナー部の長さは当然上に示した δ が小さくなれば長くなり，δ が大きくなるにつれ短くなり，やがては普通のラミナー部のないカオスとなる。この様子を図 3-26 に示してある。

さて，このラミナー部の平均の長さは δ とともにどのように変わるであろうか？　これを求めるために，まず一般の場合を考えよう。図 3-25

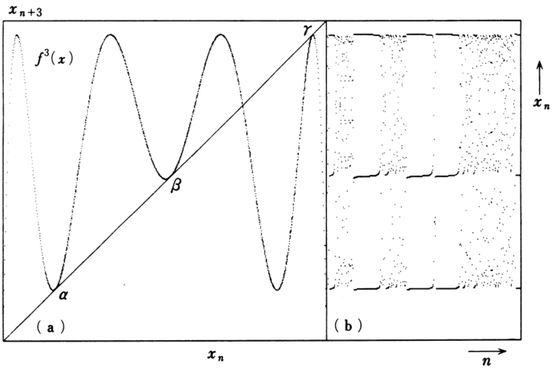


図 3-24　3 周期の窓の直前の間欠性カオス。$R=1+\sqrt{8}-\delta$，$\delta=0.0001$

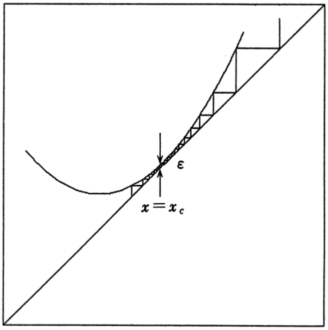


図 3-25 ラミナー部の軌道

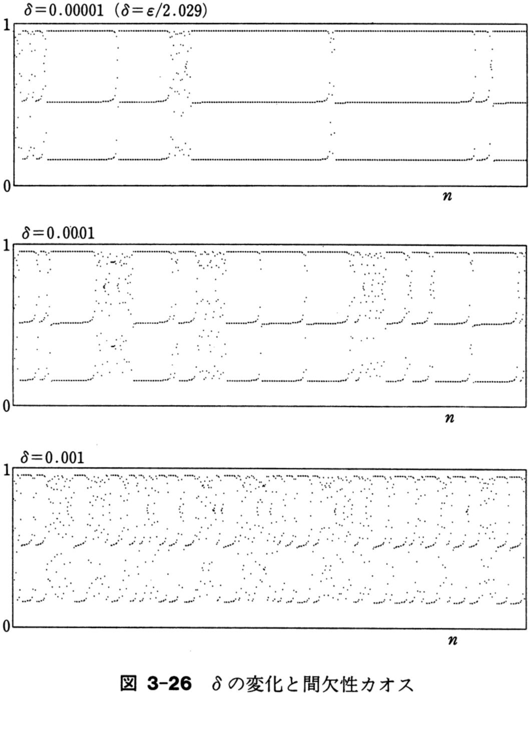


図 3-26 δの変化と間欠性カオス

のように x_c で対角線($x_{n+1}=x_n$)と ε だけ離れた写像の x_c 付近は，a を定数として次の2次式で近似できる：

$$x_{n+1}=a(x_n-x_c)^2+x_n+\varepsilon \tag{3-19}$$

この両辺より x_c を引き，x_n-x_c を改めて x_n とおけば

$$x_{n+1}=ax_n^2+x_n+\varepsilon \tag{3-20}$$

となる。ここで x_n の値はラミナー領域ではほとんど変化しない。この式で n を**連続変数**とみて，テーラー展開すると

$$x_{n+1}=x_n+\frac{d}{dn}x_n+\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dn^2}x_n+\cdots.$$

ラミナー領域では変化がゆっくりであるので，高次微分は落して

$$x_{n+1}-x_n\fallingdotseq\frac{dx_n}{dn}.$$

添字 n を省略すると

$$\frac{dx}{dn}=ax^2+\varepsilon \tag{3-21}$$

の式を得る。この式を $n=n_1$ から n_2 まで積分すると

$$n_2-n_1=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon/a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\varepsilon/a}}\right)\right\}. \tag{3-22}$$

ただし，$x_1=x_{n_1}$，$x_2=x_{n_2}$ である。

問 13　(3-21)より，(3-22)を導びけ。

ここで，x_1 はラミナーの出発点であり，この点が x の正負，すなわち x_c の両側に同じように分布しているとすると，平均的なラミナー部の長さ $\langle\ell\rangle$ は，x_1 について平均すると，$\tan^{-1}$ の奇関数性により

$$\langle\ell\rangle=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}}\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon/a}}\right) \tag{3-23}$$

となり，ε が十分小さい場合は

$$\langle\ell\rangle=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}}\cdot\frac{\pi}{2} \tag{3-24}$$

となる。

この(3-23)や(3-24)を3周期の窓の“手前”の間欠性カオスの場合に当てはめるには，ε と a を評価すればよい。

(3-19)の x_c としては3回写像の中央の極小点を対応させる(図3-24の β)。この x_c は $x=\frac{1}{2}$ に近いので，$L_R^3(x)$ としては，$x=\frac{1}{2}$ を中心とした

(3-18)を用いても良いであろう。(3-18)を

$$L_R^3(x)=A(R)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+B(R) \qquad (3\text{-}25)$$

と書く。変形して

$$L_R^3(x)=A(R)\left\{x-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2A(R)}\right)\right\}^2+x+\left\{B(R)-\frac{1}{4A(R)}-\frac{1}{2}\right\} \qquad (3\text{-}26)$$

となり，(3-19)の x_c は

$$x_c=\frac{1}{2}+\frac{1}{2A(R_c)}=0.5142\cdots$$

と求まる。この値は，付録3Aで示した正確な値 $x_c=0.5143\cdots$ とよく合っている。また放物線の係数は

$$A(R_c)=35.2, \qquad (3\text{-}27)$$

また放物線と，対角線 $(x_{n+1}=x_n)$ との距離 ε は

$$\begin{aligned}\varepsilon(R)&=\varepsilon(R_c)+\frac{d\varepsilon(R_c)}{dR}(R-R_c)+\cdots\\&=\frac{d}{dR}\left(B(R)-\frac{1}{4A(R)}-\frac{1}{2}\right)\bigg|_{R=R_c}\times(R-R_0)+\cdots\\&\fallingdotseq 2.03\delta\end{aligned} \qquad (3\text{-}28)$$

と評価される。この(3-27), (3-28)で，細かい数字を気にするなら，(3-27)の値は曲線の2回微分であるので，位置の依存性が多いであろう。x_c を中心に展開した場合の2次の係数は，付録3Aの(3A-1), (3A-2)より，

$$A=R^6\beta(R\beta+1-R)(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)^2 \qquad (3\text{-}29)$$

となる。ここで，α, β, γ は $L_R^3(x)$ が対角線 $(x_{n+1}=x_n)$ と接する点で，それらの値は付録に示してある。$R=R_c=1+\sqrt{8}$ と α, β, γ の値を代入すると，

$$A=34.1453\cdots \qquad (3\text{-}30)$$

となる。

(3-28)で示した δ の係数は，$x=x_c$ $(=\beta)$ を中心とした放物線で評価しても示した数字に変化はない。一応参考までに式を示すと，

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\delta}&=-2R\alpha\gamma+3\alpha+R\gamma-\frac{7\beta}{R}\\&=2.02945\cdots\end{aligned} \qquad (3\text{-}31)$$

となる。(3-30)と(3-31)より

$$A\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}=68.2964\cdots \tag{3-32}$$

の値は，実際上，ラミナーの平均長 $\langle\ell\rangle$ を R_c からのずれ δ で評価する際の式

$$\langle\ell\rangle=\frac{\pi}{2\sqrt{A\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}}}\frac{1}{\sqrt{\delta}} \tag{3-33}$$

に必要な数値で，この値は当然ながら x_c を α, β, γ のいずれにとっても同じとなる。具体的数値を記しておくと

$$\langle\ell\rangle=\frac{0.190}{\sqrt{\delta}}=\frac{0.270}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (x_c=\beta) \tag{3-34}$$

であり，この式と数値計算結果との一致はきわめて良い(図 3-27)。

問 14 付録 3A を参考にして，(3-29)および(3-31)を導びけ。

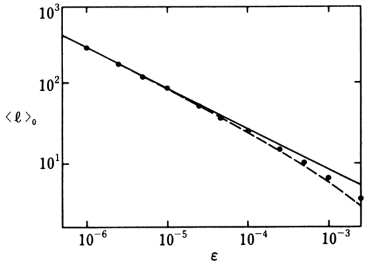


図 3-27 間欠性カオスのラミナー部の平均的長さと，コントロールパラメター ε の関係。点は計算結果，実線は(3-34)，点線は(3-23)で計算したもの［J. E. Hirsh, B. A. Huberman and D. J. Scalapino: Phys. Rev. **25A**(1981)519 より］

4章

現実的な系でのカオス

現在まで，1次元系を例にとりカオスを論じてきた。確かに1次元写像を題材にすると，カオスの種々の側面が簡明に説明できる。しかしながら余りに簡単な式であるこの1次元写像は，自然界の記述として意味をもつのであろうか？　この問に答えるために，ここでは微分方程式系に表われるカオス，および現実の系に現われるカオスについて述べる。

微分方程式系は，保存系の散逸系に分類され，カオスも各々の系に現われ，それぞれ別の特徴をもっているが，ここでは紙面の制約もあり，実験で観測されるカオスとの兼ね合いにより，主として散逸系のカオスについて述べることとする。

4.1 保存系と散逸系

保存系とは何かというと，直感的に言えば，摩擦のない振動子のようなものを連想すればよい。この場合にはエネルギーの散逸がなく振動子は永遠に振動し続ける。保存系でないものは散逸系とよばれ，代表的なものは，減衰振動である。これらの例のように系全体のエネルギーが散逸しないものを**保存系**(conservative system)とよび，エネルギーに増減があるものを**散逸系**(dissipative system)とよぶ。

保存系の代表例として，質量 m，バネ定数 k の単振り子を考えよう。

運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \tag{4-1}$$

である。$\frac{k}{m}=\omega_0{}^2$ とおいて，一般解を求めると

$$x=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t \tag{4-2}$$

となる。

方程式(4-1)において，$m\dot{x}=y$ とおくと($\dot{}$ は時間微分を表わす)，

$$\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{1}{m}y \\ \dot{y}=-kx \end{cases} \tag{4-3}$$

となる。ここで y は運動量の意味をもつ。この二つの式より，合成関数の微分の公式 $\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}$ を使うと

$$\frac{dy}{dx}=-mk\frac{x}{y} \tag{4-4}$$

が得られる。この微分方程式を積分して

$$\frac{1}{2m}y^2+\frac{1}{2}kx^2=E \tag{4-5}$$

を得る。E はエネルギーの次元を有する積分定数であり，(4-5)は運動エネルギーと位置エネルギーの和が一定であることを示している。

この関係を x-y 平面に図示すると楕円となる。この x-y 平面を相平面，楕円を軌道[†] という。

問 1 エネルギー E と(4-2)における A, B の間の関係が，

$$E=\frac{k}{2}(A^2+B^2)$$

となることを確かめよ。

問 2 楕円の面積 S と E との関係は

$$E=V_0S$$

となることを示せ。ただし，$V_0=\omega_0/2\pi$ である。この楕円の大きさは，E とともに増加するが，振動子の周期 T は変わらない(等時性)。

† 一般に，時間 t を右辺に陽に含まない式(自励系)

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

を考える。このとき空間$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を**相空間**(phase space)とよぶ。この方程式の解は一般に n 個の積分定数をもつが，$t=0$ での初期値より積分定数が定まり，相空間内で一つの曲線が定まる。この曲線を**相軌道**または単に軌道という。なお，ハミルトン力学系の相空間は単振り子のように偶数次元である。

この相平面上で，ある時刻 t_0 で点 (x_0, y_0) にある軌道は，A, B を適当に選ぶことによって指定することができる。この場合には

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t_0 & \sin \omega_0 t_0 \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t_0 & \omega_0 \cos \omega_0 t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{4-6}$$

より，A, B を求めればよい。この行列は正則であるので，(x_0, y_0) の値に対する (A, B) の組はただ一つ定まる。

次に，2 次元相平面の一般的な方程式を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{4-7}$$

とおく。この解の中で，定数 A, B で指定された解を

$$\begin{aligned} x &= x(A, B\ ;\ t) \\ y &= y(A, B\ ;\ t) \end{aligned} \tag{4-8}$$

とし，初期値の集合として，図 4-1 のような x-y 平面のある領域 D_0 を考える。D_0 の面積 S は

$$S = \iint_{D_0} dxdy \tag{4-9}$$

と書けるが，ある時刻 t における D_0 内の点 (x, y) は，定数 (A, B) と対応がつくので，S を次のように書くことができる：

$$S(t) = \iint_{\Delta_0} \frac{\partial(x, y)}{\partial(A, B)}\, dAdB \tag{4-10}$$

ここで，

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(A, B)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial A} & \dfrac{\partial x}{\partial B} \\ \dfrac{\partial y}{\partial A} & \dfrac{\partial y}{\partial B} \end{vmatrix}$$

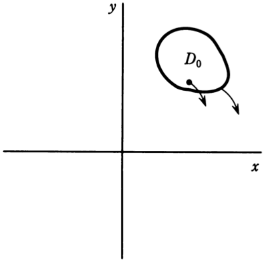


図 4-1　相平面の軌道上の点の動きと，領域 D_0 の動き

はヤコビ(Jacobi)の関数行列式である。また，Δ_0 は D_0 に対応する(A, B)平面上の領域である。

さて $S(t)$ が時間とともにどのように変化するか考えよう。まず特別な場合として，線形微分方程式を考える。微分の階数は2階であるので，基本解を x_1, x_2 とすると

$$x = Ax_1 + Bx_2$$

となり，

$$y = \dot{x} = A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2$$

ととれる。したがって，

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(A, B)} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} \equiv W(x_1, x_2). \tag{4-11}$$

ただし，この $W(x_1, x_2)$ と書いたものはロンスキー(Wronski)の行列式，または，ロンスキアン(Wronskian)とよばれるものである。

したがって，線形微分方程式の場合，$S(t)$ の時間変化は $W(x_1, x_2)$ によって定まる：

$$\frac{d}{dt}W(x_1, x_2) = x_1\ddot{x}_2 - x_2\ddot{x}_1 \tag{4-11$'$}$$

例えば，単振り子の場合には，$\ddot{x}_1 = -\omega_0{}^2 x_1$，$\ddot{x}_2 = -\omega_0{}^2 x_2$ であるので，$\dfrac{dW}{dt} = 0$ となる。したがって，W は時間によらず，相平面の面積 S は一定となる(図4-2)。

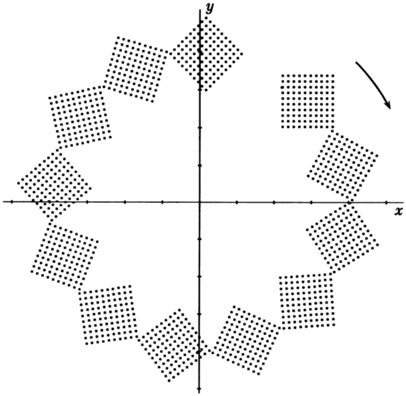


図 4-2 単振り子の相平面上の領域の運動(面積は一定)。$10 \times 10 = 100$ 点の時間変化を計算したもの

問 3　減衰振動する系

$$\ddot{x}+2r\dot{x}+\omega_0{}^2x=0 \qquad (r>0) \tag{4-12}$$

においては，$W=W_0e^{-2rt}$ であり，したがって面積は $S(t)=S(0)e^{-2rt}$ のように変化することを示せ(図 4-3)。

次に(4-10)にもどり，非線形系も含めた一般の場合を考えよう。(4-10)を時間で微分すると

$$\frac{dS(t)}{dt}=\iint_{\Delta_0}\left(\frac{\partial(\dot{x},y)}{\partial(A,B)}+\frac{\partial(x,\dot{y})}{\partial(A,B)}\right)dAdB. \tag{4-13}$$

ところで，

$$\frac{\partial(\dot{x},y)}{\partial(A,B)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\dot{x}}{\partial A} & \dfrac{\partial\dot{x}}{\partial B}\\ \dfrac{\partial y}{\partial A} & \dfrac{\partial y}{\partial B}\end{vmatrix}$$

において

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial A}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial A}+\frac{\partial\dot{x}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial A}, \qquad \frac{\partial\dot{x}}{\partial B}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial B}+\frac{\partial\dot{x}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial B}$$

を用いると

$$\frac{\partial(\dot{x},y)}{\partial(A,B)}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}\frac{\partial(x,y)}{\partial(A,B)}$$

を得る。同様にして

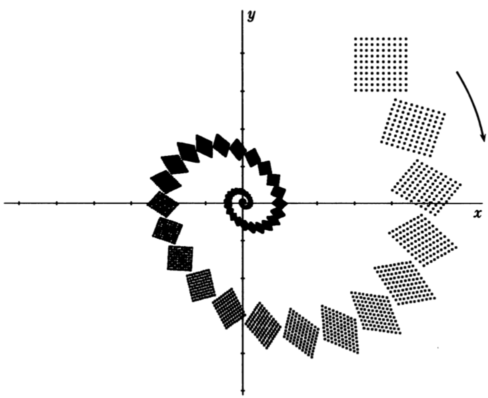


図 4-3　減衰振動の相平面上の領域の運動(面積は指数関数的に減少，アトラクタは原点)

$$\frac{\partial(x,\dot{y})}{\partial(A,B)}=\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(A,B)}$$

となるので，(4-13)は

$$\frac{dS(t)}{dt}=\iint_{\varDelta_0}\left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(A,B)}\,dAdB \tag{4-14}$$

となる。(4-14)において，十分小さい領域 $\varDelta_0$ を考えると，(4-10)により

$$\frac{\dot{S}(t)}{S(t)}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \tag{4-15}$$

を得る。この式は非常に簡単であるために，たいへん便利である。すなわち，$\dot{x}, x, \dot{y}, y$ は初期値を定める A, B の関数として考えたのであり，

$$\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_i}=\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial x_i}+\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x_i}\qquad\begin{pmatrix}i=1,2\\ x_1=x,\ \ x_2=y\end{pmatrix} \tag{4-16}$$

であるが，(4-15)は直接元の方程式(4-7)から偏微分が計算できることを示している。例えば，問3と同じ減衰振動系において $y=\dot{x}$，$\dot{x}=-2ry-x$ とおけば，$\dfrac{\dot{S}(t)}{S(t)}=-2r$ が得られる。

問 4　単振り子の方程式の解 $x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ および $y=\dot{x}$ において，(4-15), (4-16)を用いて，$\dot{S}(t)=0$ を示せ。

(4-15)は n 次元の相空間$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$の体積 V の変化率にも拡張でき，結果は

$$\frac{\dot{V}(t)}{V(t)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial x_i} \tag{4-17}$$

となる。

次に，H をハミルトニアンとするハミルトン力学系を考えよう。正準方程式は

$$\dot{p}_i=\frac{\partial H}{\partial q_i},\qquad \dot{q}_i=-\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{4-18}$$

であり，この系の相空間の体積は，

$$\frac{\dot{V}(t)}{V(t)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\partial p_i}+\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q_i}\right)=0$$

となり，常に一定である。

このようにハミルトン力学系において，相空間のある体積 $V(t)$ は時間

が経って，$V(t')$ に移っても一定に保たれる。これを**リュービル**(Liouville)**の定理**という。先に述べた単振動の相空間の体積が一定であるのは，その一例である。図 4-2 にその様子を示してある。

ハミルトン力学系のハミルトニアン H は通常，エネルギーの意味をもつ。単振動の場合は，

$$H=\frac{1}{2m}y^2+\frac{1}{2}kx^2$$

となる。

本節の始めに述べた保存系と散逸系の定義は，相空間の体積変化の有無で定義するのが一般的である。すなわち，

相空間の体積が一定なものを保存系，そうでないものを散逸系とよぶ。

4.2　アトラクタとポアンカレ断面

減衰振動の軌道は (4-12) の解

$$x=Ae^{-rt}\sin(\sqrt{\omega_0{}^2-r^2}\,t+\delta)$$

で表わされ，図 4-3 のようにすべて $t\to\infty$ で原点に近づく軌道を表わす。この場合，原点は軌道を引きつける点であり，**アトラクタ**(attractor) とよばれる。

このように，$t\to\infty$ で軌道の近づく集合，アトラクタには，相空間が 2 次元面の場合，このような点と，極限軌道とよばれる閉曲線が存在することが知られている。この閉曲線の例として，次のファン デル ポール(van der Pol) の方程式

$$\ddot{x}+\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0 \tag{4-19}$$

のアトラクタを考えよう。図 4-4 にこの方程式を計算機で解いた軌跡とアトラクタを示してある。ファン デル ポール方程式の解は時間が十分経つと，この閉曲線上を回っている点の運動としてとらえられる。これは一定振幅の振動を示し，ファン デル ポール方程式は自励振動の一つのモデル方程式である。なお，このようなアトラクタは，**極限軌道**(limit cycle) ともよばれる。

なお，これら減衰振動にしろファン デル ポールの方程式にしろ，アトラクタの存在する系では，相空間の面積は一定に保たれずに，これらの例ではやがて面積は 0 となる。

2 次元の相空間に存在するアトラクタは上記の点と閉曲線の二例だけで

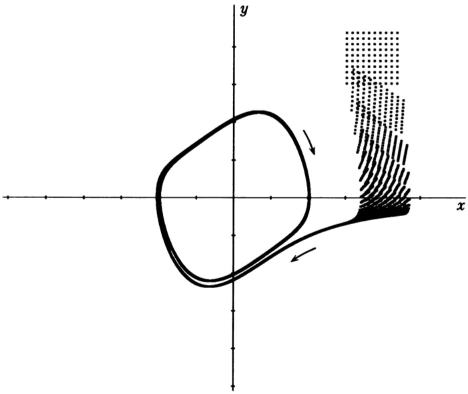


図 4-4 フアン デル ポール方程式。相平面上の領域の運動と閉曲線アトラクタ($\mu=0.5$)

あり，アトラクタの次元は各々0次元，1次元である。ところが相空間の次元が高くなると複雑なアトラクタが存在し得るのである。

カオスの簡単な例としてよく登場するものとして，レスラー(Rössler)モデル

$$\begin{cases} \dot{x}=-(y+z) \\ \dot{y}=x+\dfrac{1}{5}y \\ \dot{z}=\dfrac{1}{5}+z(x-\mu) \end{cases} \tag{4-20}$$

および，ローレンツ(Lorenz)モデル

$$\begin{cases} \dot{x}=-\sigma(x-y) \\ \dot{y}=-xz+\gamma x-y \\ \dot{z}=xy-bz \end{cases} \tag{4-21}$$

がある。ここで，μ, σ, γ, b は定数である。

これらの方程式は，化学反応中の振動や，対流を表わす方程式を簡単にした方程式であり，散逸系であり，これらの解は(x, y, z)の3次元の相空間内の軌跡として表わされるが，今まで述べてきた減衰振動や自励振動(ファン デル ポール)の方程式に比べて解の時間的振舞いが非常に複雑である。レスラー方程式を例にとって調べてみると，相空間内の軌跡は，あ

る時間が経つと，平たい帯状の領域に存在し，これ全体がアトラクタとなっている(図 4-5)。これを奇妙なアトラクタ，または**ストレンジアトラクタ**(strange attractor)とよぶ。

また，x の値を時間とともにプロットすると図 4-6 のようになり，非周期的振動である。この非周期的振動がカオスであるか否かの判定は，最大リアプノフ数が正であるか否かで行うが，このことは後に詳しく述べる。

x の値ばかりでなく，y, z の値も非周期的に変化するが，このような全体として非周期運動を行う場合には，軌道は相空間のアトラクタ上をどのように動くであろうか。この点を調べてみよう。

方法としては，**ポアンカレ断面**(Poincaré section)の方法を用いる。レスラーモデルのストレンジアトラクタ上の軌道について述べる前に，予備知識として，はじめに，このポアンカレ断面を作り，解析する方法について述べる。

まず，簡単なアトラクタとして，3 次元相空間内での簡単な閉曲線を考える。またこの閉曲線を交わる平面を考え，これをポアンカレ断面とよぶ。閉曲線とこの断面の交点は一点 P となる(図 4-7)。この平面のとり方は一義的でないが，適当な半平面を選ぶことによって，この閉曲線と一点

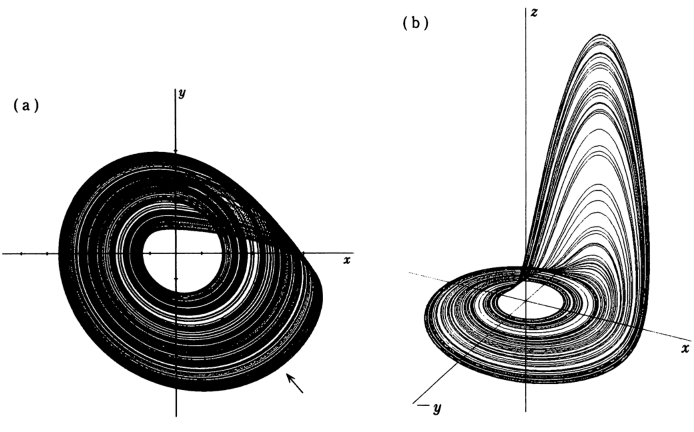


図 4-5 (a) レスラーモデルのストレンジアトラクタ。全体がアトラクタとなる。矢印方向から見た立体図を(b)に示す。(4-20)において，$\mu=5.7$ として計算

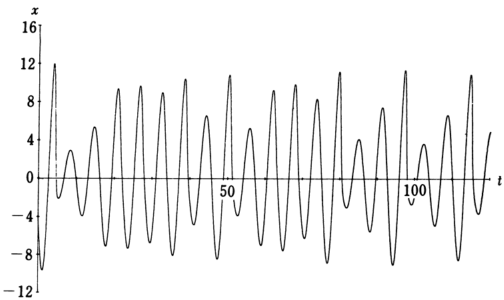


図 4-6 レスラーモデルの不規則解。(4-20)における x の時間変化

で交わらせることができる。同様のことを2重周期運動，および準周期運動について行うと，ポアンカレ断面は，2点および閉曲線となる。すなわち，ポアンカレ断面を作ることにより，3次元空間の閉曲線は点に，また2次元トーラスは閉曲線にと次元をおとして見ることができるのである。

さて，レスラーモデルのポアンカレ断面をみてみよう。上の例に比べてアトラクタが複雑であるので，図4-8のように z 軸のまわりに一周にわたってポアンカレ断面を作ってみると，各断面に一本の線が得られる。この線が一周にわたり引き延ばされ折り畳まれていることがわかり，これは先に述べてきた1次元写像と本質的に同じである。したがって，このポアンカレ断面から1次元写像が抽出できるかも知れない。このことを例えば $\theta=180°$ の場合のポアンカレ断面について，n 回目に通過する点の位置 r_n と $n+1$ 回目の点の位置 r_{n+1} を組として，(r_n, r_{n+1}) を座標の点とするよ

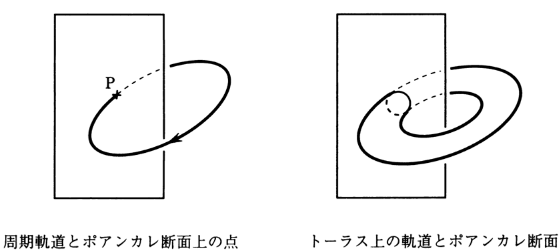


図 4-7 軌道とポアンカレ断面上の点

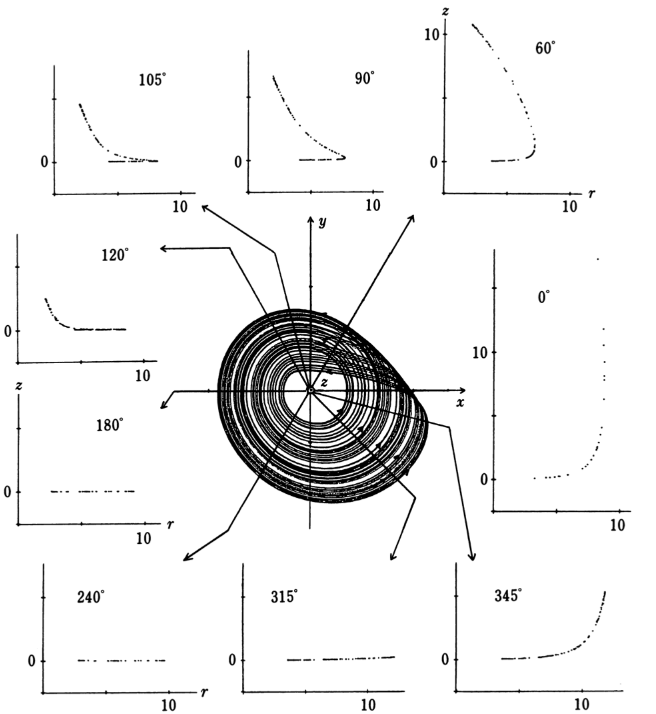


図 4-8　レスラーモデルのストレンジアトラクタのポアンカレ断面（z 軸を端とする半平面），一周すると引き延ばし，折り畳みがなされることがわかる。

うに順次プロットしてみる（これを，**ポアンカレリターンマップ**(return map)とよぶ)。そうすると，不思議なことに，図 4-9 のように(r_n, r_{n+1})平面上に1次元写像が浮び上ってくる。このことは，もとのストレンジアトラクタが，簡単な引き延ばし折り畳みの構造をもっていることを反映しているのである。なお，この1次元的なシート状のアトラクタの厚さ方向（断面）の構造は自己相似的なものと考えられる（90頁の脚注参照）。

上のリターンマップにより，(r_n, r_{n+1})に関する1次元写像が得られたことにより，この1次元写像を解析すれば，アトラクタ上を一周するごと

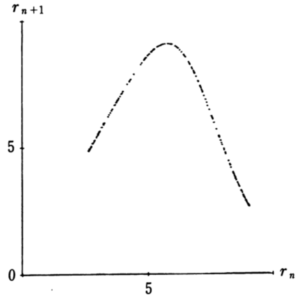


図 4-9 図 4-8 のポアンカレ断面($\theta=180°$)よりつくった(r_n, r_{n+1})のリターンマップ

の r_n の変化の様子がわかる。解析の要点としては，この写像をある数式で表わすためにある関数で近似することである。すなわち，写像の区間を I として，I の全体にわたる写像 $f(x)$ を，例えば一つの多項式で近似する方法もあるが，一般にかなり高次の多項式を必要とし，区間のどこかに無理が生ずる可能性がある。それよりは区間をいくつかに分割して区間多項式を用いて全体を表わすとよい(このような関数を**スプライン**(spline)**関数**という)。このような区間多項式でも全体として 1 回微分可能であれば，リアプノフ数を求めることができる。

4.3 リアプノフ数と体積変化率

奇妙なアトラクタの構造は，散逸力学系の特徴を反映してレスラーモデルのアトラクタのように平たい帯状のものが多い。

4.1 節の相空間の体積の変化率はレスラーモデルの場合

$$\frac{\dot{V}}{V}=\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}=\frac{1}{5}+x-\mu \qquad (4\text{-}22)$$

となる。ここで $\mu=5.7$ であり，x は図 4-6 に示したように正負に変化するので，長時間平均としては，$\dfrac{\dot{V}}{V}<0$ となる。このことは相空間内のある大きさの領域が，変形してストレンジアトラクタのシート状の図形に変形してゆくことの反映である。全体として体積が減少してゆくが，単に方向性がなく一様に減少してゆくのではなく，ある方向には延び，ある方向に

は縮むという性質をもっている。後に詳しく述べるが，1次元写像と類似の考え方で，最も延びやすい方向のリアプノフ数を λ_1 とすると，実は，系は流れに垂直なアトラクタの帯の中の方向に最も延びやすく，長時間平均の意味でこの方向に $e^{\lambda_1 t}$ の割合で延びている。もちろん $\lambda_1>0$ である。縮む方向は，アトラクタの帯の厚さの方向(垂直方向)で $\lambda_3<0$ であり，$e^{\lambda_3 t}$ の割合で縮む(図4-10)。流れの方向には指数関数的には延びも縮みもせず $\lambda_2=0$ となる。このレスラー系は3変数 x, y, z で表わされるので，リアプノフ数も独立なものが3個存在し，その正負の関係は $\lambda_1>\lambda_2=0>\lambda_3$ となっている。なお全体の体積の変化率は $\frac{\dot{V}}{V}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ で表わされ，これは負である。

このレスラー系のアトラクタのように，一方向にでも延びる性質を有し，有限な空間にアトラクタが留まるとすれば，必ず折り畳みの性質が存在し，1次元写像のところで述べた引き延ばしと折り畳みの構造が存在する。この引き延ばしの度合がリアプノフ数であるので，リアプノフ数の一つが正である系をカオスとよんでよいであろう。レスラー系の三つのリアプノフ数の組(これをリアプノフスペクトラム(Lyapunov spectrum)とよぶ)の正負関係 $\lambda_1>\lambda_2=0>\lambda_3$ は3変数のカオス系の典型的な性質であり，ローレンツモデルのリアプノフ数も同様である。これらを$(+, 0, -)$と表示する。これらは $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i<0$ であり散逸系であるが，ハミルトン力学系では $\frac{\dot{V}}{V}=\sum_{i=1}^{2N}\lambda_i=0$ となることがリュービルの定理より保証される。また，ハミルトン力学系は，時間反転$(t\to -t)$に関して不変であることより，$\lambda_i=-\lambda_{N-i+1}$ が成立する。

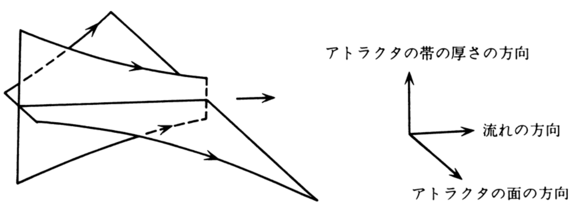


図 4-10 軌道間の距離が指数関数的に伸びる方向と縮む方向。このような流れがあるとき，平たいアトラクタがつくられる。

ハミルトン力学系のカオスの例として，簡単なものを一つ挙げておく。図 4-11 のように振り子の糸の部分にバネの入ったもので，この系の運動方程式は

$$m\ddot{x}=m(\ell+x)\dot{\theta}^2+mg\cos\theta-kx$$
$$(\ell+x)\ddot{\theta}+2\dot{x}\dot{\theta}=-g\sin\theta \qquad (4\text{-}23)$$

で与えられる。ただし，ℓ は振り子の自然長，x はバネの延び，θ はバネと鉛直線のなす角である。この(4-23)で与えられる系は，不規則な振動を生ずるが，振動の一例を図 4-12 に示す。

また，付録 4C にこのバネと振り子の系と類似の二重振り子の系を示しておく。

問 5 運動方程式(4-23)を，極座標(r, θ)において，半径方向の加速度 a_r，およびそれに垂直方向の加速度 a_θ がそれぞれ

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2, \qquad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta} \qquad (4\text{-}24)$$

であることを利用して導びけ。

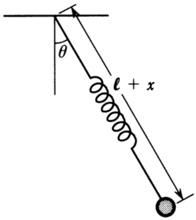


図 4-11 バネを含む振動子

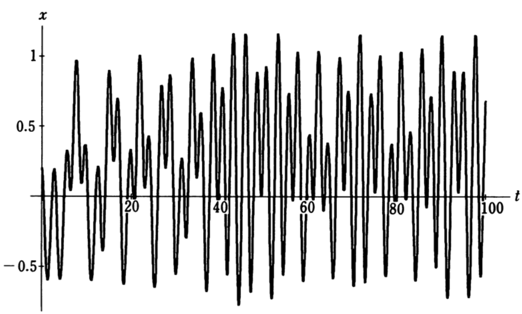


図 4-12 バネつきの振動子の振動図。変数 x の時間変化

問 6 (4-23)の系のハミルトニアン H を

$$H=\frac{y^2}{2m}+\frac{1}{2m}\frac{\alpha^2}{(\ell+x)^2}+mg\ell-mg(\ell+x)\cos\theta+\frac{1}{2}kx^2 \quad (4\text{-}25)$$

とする。ただし，$y=m\dot{x}$，$\alpha=m(\ell+x)^2\dot{\theta}$ である。このとき，ハミルトンの正準方程式

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y},\qquad \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x},\qquad \dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial \alpha},\qquad \dot{\alpha}=-\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (4\text{-}26)$$

が成立することを示せ。また，相空間(x, y, θ, α)において，$\dfrac{\dot{V}}{V}=0$ であることを確かめよ。

これらのハミルトン力学系では，相空間のある広がった領域の軌道の性質を調べる必要がある。一方，ローレンツモデルやレスラーモデルのような散逸系のカオスにおいては，ストレンジアトラクタが存在し，十分時間が経てば，軌道はほぼ十分にアトラクタに近づく。したがって，アトラクタの性質を調べれば，カオス軌道の性質がわかる。これに比べてハミルトン力学系ではアトラクタは存在せず，カオスの性質は散逸系のように単純ではない。

4.4 アトラクタの構成

実験等により振動現象を測定する場合を考えよう。この場合，対象より得る信号の種類は通常一種類の場合が多い。例えば，単振動，減衰振動の測定を行う場合，質点の位置と速度を同時に測定するのではなくて，通常は位置の時間変化のみを測定し，速度は後に位置の変化から求めることができる。こうして位置の時間に対する連続した記録 $x(t)$ さえあれば，その時間微分 $\dot{x}(t)$ が原理的には求まり，相平面$(x(t), \dot{x}(t))$の軌跡は求まる。しかし実際問題として，微分の操作を行うというのは高周波の雑音を強調しやすく，実にいやな操作である。そこで $\dot{x}(t)$ の代用として，$x(t)$ の時間ずらしの信号 $x(t+\tau)$ を用いる。$x(t+\tau)$ には，$x(t)$ と線形独立の成分を含んでいるので，本質的には，単振動なり減衰振動の相平面上の軌跡を描くことができる(図 4-13)。

問 7 減衰振動の方程式(4-12)の一般解を $x(t)$ とすれば，$x(t+\tau)$は

$$x(t+\tau)=e^{-r\tau}\left(\cos\tilde{\omega}\tau+\frac{r}{\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}\tau\right)x(t)+\frac{e^{-r\tau}}{\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}\tau\ \dot{x}(t) \quad (4\text{-}27)$$

と表わされることを示せ。ただし，$\tilde{\omega}=\sqrt{{\omega_0}^2-r^2}$．

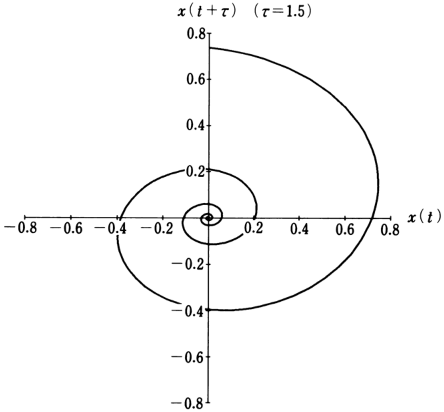


図 4-13 $(x(t), x(t+\tau))$でつくった減衰振動の相平面上の軌道

この時間ずらしの信号 $x(t+\tau)$ と $x(t)$ とのリサジュー(Lissajous)図形を描くには，デジタルメモリーを利用すれば容易にできる。

この方法を一般の観測波形に適用する。一般の系は通常非線形であり，ここで述べたような線形独立の概念は適用されないが，直感的に理解して先に進む。

一つの量 $x(t)$ より，m 次元の空間の中に軌跡を描くには，適当な τ をとり

$$(x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \cdots, x(t+(m-1)\tau))$$

の軌跡を作ればよい(図 4-14)。すなわち軌跡を m 次元の空間に埋込む(embedding)のである。この m を**埋込み次元**とよぶ。この埋込みの方法により，アトラクタの特徴が一つの信号より復活できることを，ターケンス(F. Takens, 1981)が示した。

さて，この埋込みの方法で，τ や m はどのように設定したらよいであろうか。まず τ の大きさであるが，原理的には任意の大きさであるが，あまり小さいと独立な成分が小さく図形が直線状となり，その特徴が判定しずらいし，またあまり大きくとるのも無意味である。さらに，カオス特有の軌道不安定性のために雑音が拡大されて，不必要が誤差を多く取り入れてしまう。経験的に言えば平均周期の数分の一にとればよい。この方法

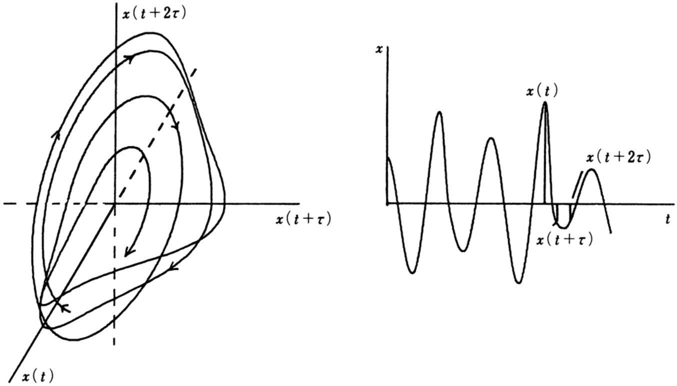


図 4-14 $(x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau))$の軌道によるアトラクタの再構成

によりレスラーモデルの一つの変数$x(t)$より，アトラクタを復活させたものを図 4-15 に示す。またマグノンカオス†の一信号より作ったアトラクタ，およびそのポアンカレ断面を図 4-16 に示す。これらより引き延ばし折り畳みの構造が存在することがわかる。

次にmの値であるが，不規則波形の場合には少なくとも 3 以上である必要がある。これは次節に述べる相関次元が一定値に落ち着くことを見ながら決めればよいであろう。

減衰振動のアトラクタの点や，ファン デル ポールのアトラクタの閉曲線は，次元が 0 および 1 の簡単な図形である。ところがレスラーモデルのアトラクタは，薄いシート状の 2 次元的構造であるが，このシートの厚さ方向には軌道が複雑に立体交差しており，フラクタル的構造(次節に説明)をしているものと考えられる。レスラーモデルの場合は，2 次元性が強く，厚さ方向の構造は観測されないが††，直感的にいって 2 次元よりは厚さの分だけ多く，3 次元というにはおこがましく，$(2+\alpha)$次元$(0<\alpha<1)$

† このマグノンカオスは，強磁性体$(CH_3NH_3)_2CuCl_4$中に磁気共鳴で励起されたマグノン(スピン波)が，磁気共鳴周波数(数 GHz)よりはるかに低い周波数(数十 KHz)の別の振動を起こし，その振動がカオスになるものである。

†† レスラーモデルのリアプノフスペクトラムは，(4-20)を数値計算すると，$\mu=5.7$の場合$(0.072, 0.000, -5.388)$となる。厚さ方向に縮む割合は，$\fallingdotseq -\mu+\frac{1}{5}$程度となる。また平均周期は，$2\pi\fallingdotseq 6$程度であるので，図 4-8 で$\theta=60°$の場合の$z=0\sim10$まで分布した構造が，一周の後には，$10\times e^{-5.4\times6}\fallingdotseq 10^{-13}$と極微の世界に縮んでしまう。

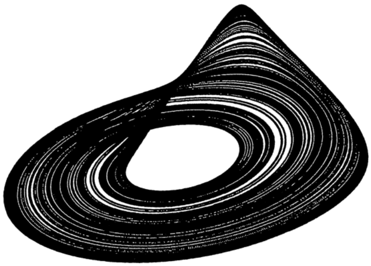


図 4-15 図4-13の手法によるレスラーモデルのアトラクタの構成($(x(t), x(t+\tau))$面への投影)

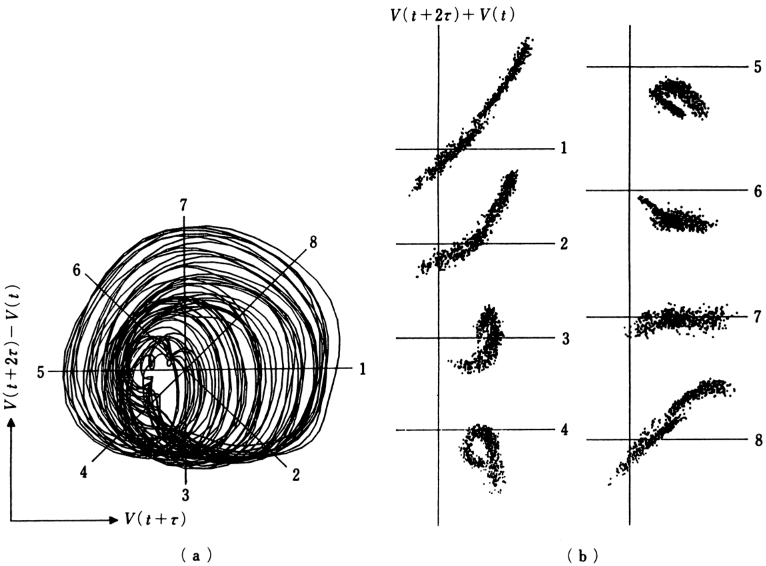


図 4-16 (a) マグノンカオスの信号より構成したストレンジアトラクタ，およびポアンカレ断面。面は番号がついた直線に垂直である。(b) 各ポアンカレ断面図 2 → 3 → 4 → 5 に折り畳みの様子が，6 → 7 → 8 → 1 に引き延ばしの様子が見られる［H. Yamazaki, M. Mino, H. Nagashima and M. Warden: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 742 より］

というべきであろう。よく引用される差分方程式のエノン(Hénon)マップ

$$\begin{cases} x_{n+1}=y_n-1-ax_n^2 \\ y_{n+1}=bx_n \end{cases} \tag{4-28}$$

のアトラクタの場合を図 4-17 に引用しておく。

次節では，このようなフラクタル構造の図形の次元を求めることを考えてみる。

このようなストレンジアトラクタの非整数次元を手作業で求める最も早い方法は，後述する相関次元の方法である。以下では一般的に非整数次元を求める方法についても述べる。

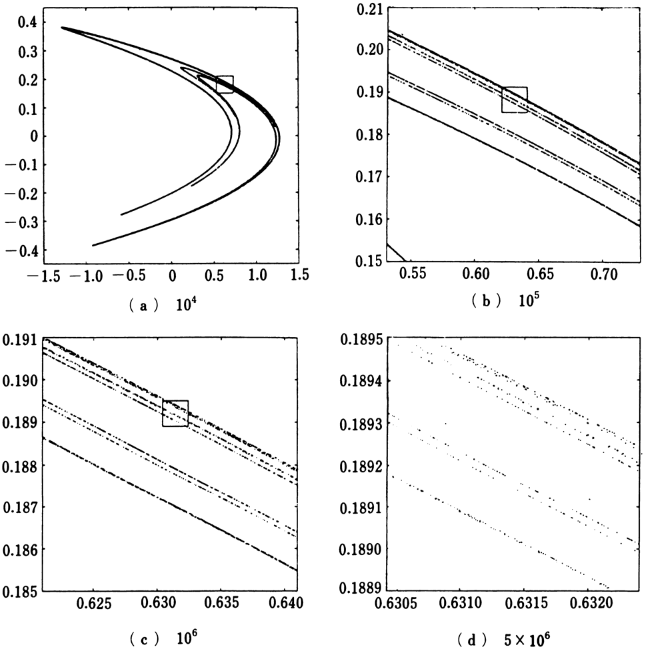


図 4-17　エノン(Hénon)マップのアトラクタ。(a)から(d)への各正方形の部分を拡大している。自己相似的構造がよくわかる［M. Hénon : Commun. Math. Phys. **50** (1976) 69 より］

4.5 ハウスドルフ次元，一般化次元，フラクタル

非線数次元を与える代表的な次元にハウスドルフ次元がある。これは対象とする図形(集合)E を直径[†]が ε (>0)以下の閉集合[††]で覆う。それらの直径を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ として，覆い方に関する

$$\inf \sum_k \varepsilon_k{}^\alpha \qquad (\alpha > 0) \tag{4-29}$$

を考える。すなわち最も効率よく覆い，$\sum_k \varepsilon_k{}^\alpha$ の値を小さくする。そして $\varepsilon \to 0$ のときのこの値を $\Lambda_\alpha(E)$ とおくと，$\Lambda_\alpha(E)$ はある α_0 が存在し

$$\Lambda_\alpha(E) = \begin{cases} \infty & (\alpha < \alpha_0) \\ 0 & (\alpha > \alpha_0) \end{cases} \tag{4-30}$$

となることが示せる(図 4-18)。この α_0 を**ハウスドルフ**(Hausdorff)**次元**とよび，ここでは D_0 と書く。ここで，$\Lambda_\alpha(E)$ の値自身は，∞, 0, その中間，のいずれでもよい。

ここで，簡単な例を挙げる。

(1) 長さ ℓ の線分： ある ε (>0)に対して，すべて同じ直径 ε の球でこの線分を覆うと，必要な球の最小の個数は $\dfrac{\ell}{\varepsilon}$ 個である(厳密には $\left[\dfrac{\ell}{\varepsilon}\right]+1$ 個となる。[ ]はガウス記号である)。よって，$\sum_{i=1}^{\ell/\varepsilon} \varepsilon^\alpha = \ell \varepsilon^{\alpha-1}$ となる。$\alpha > 1$ の場合には，$\varepsilon' < \varepsilon$ なる ε' に対して $\ell \varepsilon'^{\alpha-1} < \ell \varepsilon^{\alpha-1}$ となるので，より小さい径の球で覆ったほうが $\sum \varepsilon_k{}^\alpha$ の値は小さくなる。ε' はいくら小さくとってもよいので，$\inf \sum \varepsilon_k{}^\alpha = 0$ となり，$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf \sum \varepsilon_k{}^\alpha = 0$ となる。

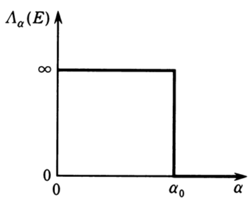


図 4-18 集合 E のハウスドルフ次元の決定

† 直径とはその集合の最も離れた 2 点間の距離で，球ならば直径，正方形ならば対角線の長さである。

†† 閉集合とは平たくいえば周囲(へり)を含まぬ集合であり，1 次元集合では，例えば，閉区間，カントール集合などがそうである。

一方，$\alpha<1$ の場合は，与えられた ε に対して，ε そのものの直径の球で覆うと $\sum \varepsilon_k{}^\alpha=\ell\varepsilon^{\alpha-1}$ が最も小さくなり，$\inf\sum \varepsilon_k{}^\alpha=\ell\varepsilon^{\alpha-1}$ であるので，$\liminf_{\varepsilon\to 0}\sum \varepsilon_k{}^\alpha=\infty$ となる。よって $\alpha_0=1$ が境目で，長さ ℓ の線分のハウスドルフ次元は1となる。

この例は次のように答えてもよい。$\alpha=1$ のとき，$\Lambda_\alpha=\ell$ と有限の値であるので，$D_0=1$ である。一般に $\alpha=\alpha_0$ の値において，Λ_α が有限の値をとるとき，この α_0 に対し(4-30)の性質が成立し，α_0 がハウスドルフ次元となる。したがって実用的には，有限確定な $\Lambda_\alpha(E)$ を与える α_0 をもってハウスドルフ次元とすることが多い。

問 8 長方形，直方体のハウスドルフ次元を求めよ。

このように，線分や長方形，直方体等の簡単な図形のハウスドルフ次元は，通常の次元と一致する。

（2） 可算無限個の点の集合： $\alpha>0$ の場合には，例えば可算無限個の点を $\varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\varepsilon^2}{2^2}, \cdots$ の球で覆えば，$\sum \varepsilon_k{}^\alpha=\dfrac{\varepsilon}{1-(1/2)^\alpha}$ となる。$\varepsilon'<\varepsilon$ である ε' で ε を置き換えれば，この値はより小さくなるので，$\inf\sum \varepsilon_k{}^\alpha=0$ となる。よって，$D_0=0$ である。すなわち，可算無限個の点の集合のハウスドルフ次元は0である。

（3） コッホ(Koch)曲線： コッホ曲線は図4-19に示す手順で作られる。K_n の段階で，$\varepsilon=\dfrac{1}{3^n}$ ととる。直径 ε の球で曲線を覆うには，4^n 個の球が必要である。ゆえに，

$$\sum \varepsilon_k{}^\alpha=4^n\left(\frac{1}{3^n}\right)^\alpha=e^{n(\log 4-\alpha\log 3)}.$$

ここで，$\alpha_0=\dfrac{\log 4}{\log 3}$ ととれば，$\sum\varepsilon_k{}^\alpha=1$ となり，この値は n に無関係となり，

$$\Lambda_{\alpha_0}=\liminf_{\varepsilon\to 0}\sum \varepsilon_k{}^\alpha=1$$

となる。よって，コッホ曲線のハウスドルフ次元は，$D_0=\alpha_0=\dfrac{\log 4}{\log 3}=1.2618\cdots$ となる。

このように非整数次元を与える図形を一般に**フラクタル**(fractal)という。フラクタルは，このコッホ曲線や，次に述べるカントール集合のように自己相似構造(一部を拡大するとその中に全体が含まれているもの)をも

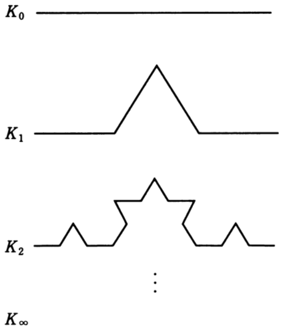


図 4-19　コッホ曲線 K_∞ をつくる操作

つものが多い。

このハウスドルフ次元を簡単にしたものに容量次元がある。これはハウスドルフ次元において，$\varepsilon_1=\varepsilon_2\cdots=\varepsilon$ とおいたもので，対象の集合を覆う最小の球の個数を $n(\varepsilon)$ とし

$$\inf\sum\varepsilon_k{}^\alpha=n(\varepsilon)\,\varepsilon^\alpha,\qquad \Lambda_{\alpha_0}(E)=C\ \ (=\text{有限})$$

とおけば，

$$\alpha_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log n(\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{\varepsilon}} \tag{4-31}$$

となる。これを D_{ca} とおき**容量**(capacity)**次元**とよぶ。

この容量次元は，直感的にも理解が容易であるし，計算上の取扱いも楽である。複雑な図形の計算に進む前に，図 4-20 に示した線分，長方形等の容量次元の求め方を是非理解しておいていただきたい。これらはもちろん整数次元で，通常用いている次元と一致する。

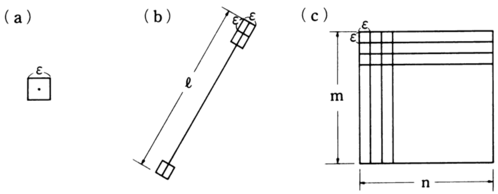


図 4-20　点，線分，長方形の容量次元

次に，カントール集合を考える。図 4-21 の C_n において，$N(\varepsilon)=2^n$，$\varepsilon=\dfrac{1}{3^n}$ であるので，$D_{\mathrm{ca}}=\dfrac{\log 2}{\log 3}=0.6309\cdots$ となる。

このようにコッホ曲線やカントール集合の結果は，直感と一致している。すなわちコッホ曲線は 1 次元と 2 次元の中間であろうし，カントール集合は 1 次元以下であろう(小数部の値の妥当性まではわからないが)。

問 9 図 4-22 のよう線分に，同じ長さの線分を十字に交わらす。この操作を無限に続けてできる図形の容量次元を求めよ。

この容量次元は，上の例のように同じ大きさの球(立方体でもよい)で対象の集合を順次覆ってゆき，$n(\varepsilon)$ が ε の関数として表現できる場合に有効である。

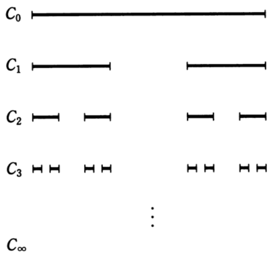


図 4-21 カントール集合 C_∞ をつくる操作。$C_0=[0,1]$，$C_1=C_0-\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，$C_2=C_1-\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)-\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$，$\cdots$

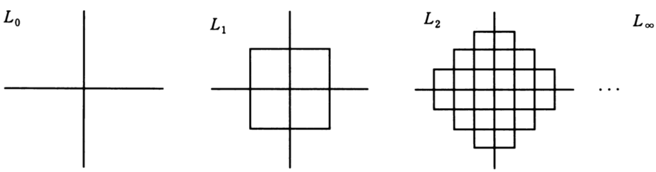


図 4-22 線分でつくる図形 L_∞. L_0：長さ 1 の線分二つでつくられた十字，L_1：L_0 の 1/2 の長さの四つの線分を用い，長さ 1/2 の線分を直交させ十字を四つつくる，L_2：1/4 の長さの線分 16 個を用い，16 個の十字をつくる。以下同様。

次に登場するのは，情報次元，相関次元等であるが，これらを個別的に述べるよりは，より一般化された次元について述べることにする。

対象とする空間(例えば d 次元)中の集合について考える。この d 次元空間を一辺 ε の立方体の箱で区切る。この箱の総数を $n(\varepsilon)$ とする。カオスのアトラクタの次元を求めることを念頭において，その軌跡が i 番目の箱に滞在する確率 p_i を求める。具体的によく行うのは，軌道 $\boldsymbol{x}(t)$ を時間間隔 τ で切り，$(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{x}(2\tau), \cdots, \boldsymbol{x}((N-1)\tau))$ の N 個の標本をつくり，i 番目の箱に入る個数 N_i $(i=1, 2, \cdots, n(\varepsilon))$ を数え，入る確率

$$p_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} \tag{4-32}$$

を求める。この p_i を用い，次の $\boldsymbol{D_q}$ (**一般化次元**という)を導入する：

$$D_q = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log\left(\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i{}^q\right)}{\log \varepsilon} \qquad (-\infty < q < +\infty) \tag{4-33}$$

この D_q で $q=0$ とおくと，$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i{}^0 = n(\varepsilon)$ であるので

$$D_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log n(\varepsilon)}{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}$$

となり，これは(4-31)と同じ式，すなわち容量次元となる：

$$D_0 = D_{\mathrm{ca}}$$

$q=1$ の場合は，$q\to 1$ で定義して

$$D_1 = \lim_{q\to 1} D_q = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i \log p_i}{\log \varepsilon} \tag{4-34}$$

となる。

問 10　ロピタル(L'Hospital)の公式で(4-34)を導びけ。

(4-34)中の $\sum p_i \log p_i$ は情報理論での情報量の形をしているので，D_1 のことを**情報次元**(information dimention)とよぶ。ここで，情報次元に関してのイメージをもつために，簡単な例を示す。前述のカントール集合(図 4-21)において，C_2 の段階で箱の総数は 3 であり，最も単純に両端の箱に点の入る確率は $\dfrac{1}{2}$ であり，中央の箱への確率は 0 であるとすると

$$\frac{\sum_{i=1}^{3} p_i \log p_i}{\log \varepsilon} = \frac{\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + 0\log 0 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{3}} = \frac{\log 2}{\log 3} \qquad (4\text{-}35)$$

となる。これは任意の n の C_n においても同じで，カントール集合の情報次元は，その容量次元と一致する。ただし，(4-35)において $0\log 0$ は，$\lim_{\delta\to 0}\delta\log\delta = 0$ を意味するものとする。

問 11　このカントール集合の場合，一般化次元 D_q も q によらず $\frac{\log 2}{\log 3}$ となることを示せ。

この例のように，場所により確率が同じである場合には，容量次元と情報次元とは同じ値をとるが，場所によって確率が異なる場合には一般に情報次元は容量次元より小さくなる。実験などで得たデータは，場所により濃淡があり，確率が異なる場合に相当するとして処理する。

次に，$q=2$ の場合は

$$D_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\log\left(\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i{}^2\right)}{\log \varepsilon}\right\} \qquad (4\text{-}36)$$

となり，これは**相関次元**(correlation dimention)とよばれ，計算機を用いて次元を求める際には，最も利用される次元である。この相関次元に関しては，計算に都合のよい表わし方を後に述べる。

このように，いくらでも次元が出てくるのであるが，最近では，計算機シミュレーションにおいては 4.7 節の $f(\alpha)$ スペクトラムの関連で一般化次元 D_q が用いられる。D_q の q への依存性は $0<q<q'$ ならば，$D_{q'}<D_q$ であること(すなわち，q に対する単調減少性)が示せる(この証明は付録 4 A に示す)。

問 12　$f(x)$ が上に凸の関数ならば，$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} a_i = 1,\ a_i > 0$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} a_i f(x_i) \leqq f\left(\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} a_i x_i\right) \qquad \text{(エンゼン (Jensen) の不等式)} \qquad (4\text{-}37)$$

であることを利用し，$f(x)$ を適当に選ぶことにより，$D_0 \geqq D_1 \geqq D_2$ を示せ。

4.6　相関次元の求め方

実際のストレンジアトラクタより相関次元 D_2 を求めるには，相関積分

$$C(\varepsilon)=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}H(\varepsilon-|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|) \tag{4-38}$$

を利用する。ここで $H(\cdot)$ は，ヘビサイド(Heviside)関数で

$$H(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \tag{4-39}$$

である。また，$|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|$ はベクトル $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j$ 間の距離で，このとり方は後に述べる。相関積分と相関次元の量を示すために，次の量を定義しておくと便利である：

$$C_i(\varepsilon)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}H(\varepsilon-|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|) \tag{4-40}$$

これは，$\boldsymbol{x}_i$ を中心とした半径 ε の球内に点の入る確率を表わしている。すなわち，$p_i=C_i(\varepsilon)$ である。よって，$\sum p_i^2$ の和を球にわたっての和より，$\boldsymbol{x}_i$ の場所の平均操作 〈　〉 を行なう：

$$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}p_i^2=\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}p_iC_i(\varepsilon)=\langle C_i(\varepsilon)\rangle=C(\varepsilon) \tag{4-41}$$

よって，

$$D_2=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\left(\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}p_i^2\right)}{\log\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log C(\varepsilon)}{\log\varepsilon} \tag{4-42}$$

と書ける。

この式を利用して，レスラーモデルのストレンジアトラクタの次元を計算すると，2次元よりほんの少し大きな値となる。計算結果と相関次元の適用例を次に示す。

相関次元を相関積分の方法で求めるには前述したように，信号 $x(t)$ より，m 次元空間の点の集合 $\boldsymbol{x}_j=(x(t_j), x(t_j+\tau), \cdots, x(t_j+(m-1)\tau))$ をつくる。ここで，$j=0, 1, 2, 3, \cdots$ である。最も簡単には，$t_0, t_1, t_2, \cdots$ の時間間隔を τ にとればよい。これらの点を用い(4-38)により $C(\varepsilon)$ を計算し，(4-42)により D_2 を求める。この際，埋込み次元 m が本来のアトラクタの次元 D_2 より小さいと，次元は m でつかえて m 止まりとなるが (D_2^m)，m を増加させるとアトラクタ本来の次元が出てくる。

図 4-23, 24 にエノンマップ，ローレンツモデル，およびレスラーモデルのアトラクタの次元を示してある。それぞれ 1 次元，2 次元，2 次元に近い値が得られている。また，図 4-25 に前述のマグノンカオスで得られたストレンジアトラクタの相関次元の解析を示してある。

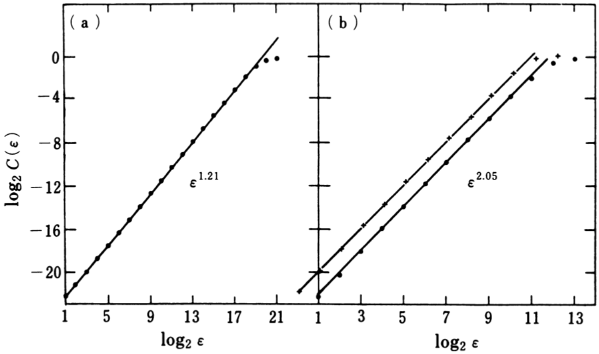


図 4-23 相関積分の方法で求めた相関次元。(a) エノンマップ，(b) ローレンツモデル。各々アトラクタの形を反映してグラフの傾きより 1 次元，2 次元に近い値が得られている［P. Grassberger and I. Procaccia: Phys. Rev. Lett. **31** (1983) 347 より］

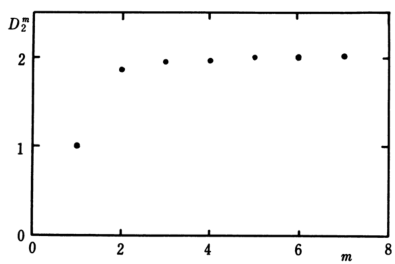


図 4-24 m 次元の埋めこみ空間の中で計算したレスラーモデルのアトラクタの相関次元 $D_2{}^m$. m が大きくなると本来の相関次元 D_2 が出てくる。$D_2 \sim 2$ で，ローレンツモデル同様に平たいアトラクタとなっている。

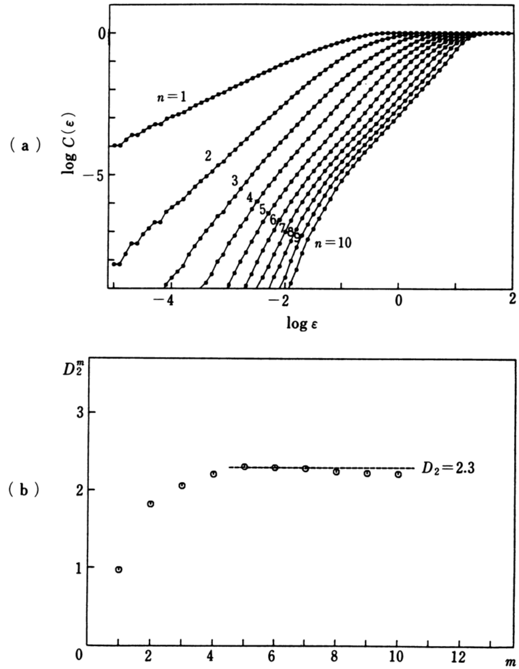


図 4-25 マグノンカオスの実験。(a) 相関積分 $C(\varepsilon)$ と ε の関係。$-4<\log C(\varepsilon)<-2$ の部分より相関次元を求めている。$\log C(\varepsilon)<-5$ の部分は雑音の影響を受けている。(b) $D_2 \fallingdotseq 2.3$ が得られる [H. Yamazaki, M. Mino, H. Nagasima and M. Warden : J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 742 より]

このように，実験で得られた不規則データよりアトラクタの次元を求め，その次元が小さければ，もともとの系が多自由度であっても，運動は少数の変数で，実質的には記述され得るものであることを示している。

さてここで，相関次元解析に関する補足を行う。まず技術的なこととして二つの相空間のベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ の間の距離 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ は何をとってもよいが

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i|^n\right)^{1/n} \qquad (n=1, 2, \cdots) \qquad (4\text{-}43)$$

において，$n=2$ はユークリッドの距離で，いちばんなじみが深いであろ

う。$n=1$ の場合のほうが計算が速いので，これも良く用いられる。実は，どの距離を採用しても同じ結果が得られる。

次に，$\log C(\varepsilon)$ と $\log\varepsilon$ の関係を求めるために，$\log\varepsilon$ の一定の区間ごとに入る $|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_j|$ の度数分布を求めなければならないが，計算機での処理上この分類を効率よく行うことが重要である。一例として，ある区間をある整数 k に対応させ，$|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_j|$ がこの区間内にあるとき，計算機上の配列 $A(k)$ の値を 1 だけ増加させる。後に $A(k)$ より，$|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_j|$ の累積度数分布，すなわち $C(\varepsilon)$ を求めれば，数値間の大小比較の手間が省ける。

次に標本点の個数 N であるが，少なすぎると不正確となり，多すぎると計算に時間がかかりすぎる。$D_2=2$ の場合には N が数百点でも求まり，D_2 が増加するほどこの値は多く必要である。また，あまり N が多いと $\frac{N(N-1)}{2}$ 個の距離の計算をして分類するのに手間がかかる。この場合の便法として，N の中から M 点を抽出し

$$C(\varepsilon)=\langle C_i(\varepsilon)\rangle=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}C_i(\varepsilon)$$

$$=\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}H(x-|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|) \tag{4-44}$$

とする。また，一般化次元 D_q も $C_i(\varepsilon)$ を用いて計算できる。(4-41) と同様にして

$$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}p_i{}^q=\langle C_i{}^{q-1}(\varepsilon)\rangle \tag{4-45}$$

となる。これと (4-33) を組み合せて D_q を算出する。具体的には相関次元の場合と同様に，$\log\langle C_i{}^{q-1}(\varepsilon)\rangle$ と $\log\varepsilon$ のグラフの傾きより，$(q-1)D_q$ を求めればよい。

次に，雑音に関してであるが，実験的に得られた信号には必ず雑音が入っている。雑音は相空間の軌跡をその大きさだけぼやかすのであるから，ε が雑音のレベルより小さい場合には雑音の次元を評価し，ε が雑音のレベルよりかなり大きければ雑音は無視できる（図 4-26）。したがって，雑音のレベルがある程度小さく，ε のある範囲で $\log C(\varepsilon)$ と $\log\varepsilon$ の比より次元が評価できることが必要である。

この相関次元の計算法は，グロスバーガー (P. Grassberger) とプロカチア (I. Procacia) により開発され，データ数が比較的少なくてすむことから，その意義は実験家にとって特に大である。

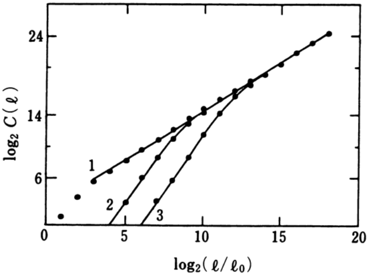


図 4-26 雑音の影響を受けたエノンマップの相関積分。1は雑音がない場合。2, 3の順に雑音が大きくなる。雑音レベルより上では，本来のエノンマップの次元が現われる［A. Beu-Mizrachi and I. Procaccia: Phys. Rev. **29A** (1984) 975 より］

カオス実験の初期における“カオス＝小数自由度系の乱雑さ”の認定法は，(1) 制御パラメターを変えることによる規則・不規則振動の転移の確認，(2) ローレンツプロットによる1次元写像の構成，の二つであった。(1)の制御パラメターの変化は，実際の系では非常に細かな調節を要するものが多い。またそれ以前に実験条件がきわめてよく設定されていなければならない。計算機ならば簡単に微調できるパラメターも，実験系ではそのために途方もなくたいへんな努力をしなければならないことが多い。すなわち，実験系でカオスへの道すじをうまくとらえるのは一般的に言って容易ではない。また，(2)のローレンツプロットは，実験信号のピーク値$(A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots)$において$(A_i, A_{i+1})$の値を順次$(i=1, 2, 3, \cdots)$平面上にプロットしてゆくものである。うまくゆけばこれがレスラーモデルで示したように1次元写像が得られる。しかし，一般的にいってローレンツプロットより1次元写像を得るのはたいへんまれなことである。すなわち，アトラクタがレスラーモデルのように，2次元性を有し簡単な引き延ばし折り畳み構造をしていなければならない。このような単純なカオスの場合にかぎりローレンツプロットの方法は有効なのである。

これに比べてアトラクタの次元を求める方法は，有効範囲がはるかに広い。質の良い時系列データがあれば，それが熱雑音のような多自由度の乱雑さか，それとも少数自由度での不規則性かを判定することができる。またデータの質がかなり良ければ，後述するリアプノフ数や，大域的スペク

トラムといわれる $f(\alpha)$ も求めることができる。実際この方向で，多くのデータが処理され，カオス研究に役立っている。

次に，アトラクタの次元がリアプノフ数と関係していることを述べておく。

図 4-27 のように 2 次元写像(例えば前述のエノンマップ)のアトラクタの ℓ_1, ℓ_2 の長さの辺で囲まれた部分を考える。時間 t の間に，各々の辺は $\ell_1 e^{\lambda_1 t}$，$\ell_2 e^{\lambda_2 t}$ の長さに変化する。横,縦方向の次元をそれぞれ，D_1, D_2 とすると，点の個数が保存されることから

$$\ell_1^{D_1} \ell_2^{D_2} = (\ell_1 e^{\lambda_1 t})^{D_1} (\ell_2 e^{\lambda_2 t})^{D_2}.$$

これより，

$$D_1\lambda_1 + D_2\lambda_2 = 0, \qquad D_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} D_1.$$

合計の次元 D は，

$$D = D_1 + D_2 = D_1\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right).$$

D_1 はアトラクタが線状に延びた方向で，D_2 はカントール集合的な構造となる。したがって，$D_1 = 1$ とおいてよい。すなわち

$$D = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{4-46}$$

となり ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$)，この値は多くの 2 次元写像において，直接計算で得た次元の値とよく一致している。カプラン(J. Kaplan)とヨーク(J. Yorke)は，ストレンジアトラクタの次元に関して次のような一般的な式

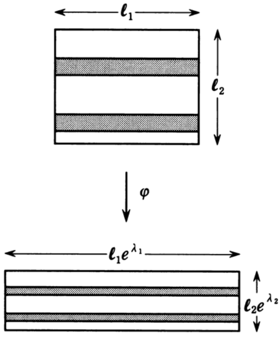


図 4-27 2 次元写像 φ における区間変形

を提案した：

$$D_{\mathrm{KY}}=j+\frac{\sum_{i=1}^{j}\lambda_j}{|\lambda_{j+1}|} \tag{4-47}$$

ここで，$\sum_{i=1}^{j}\lambda_i \geqq 0$，$\sum_{i=1}^{j+1}\lambda_i<0$ とする。この D_{KY} を**リアプノフ次元**という。

4.7　リアプノフ数の求め方

1次元写像でも示したように，リアプノフ数はカオスの基本である引き延ばし，折り畳みのうちの，引き延ばしの具合を数量化する指数である。1次元写像の場合には関数形 $f(x)$ が正確にわかっているか，またはスプライン関数などにより近似的に与えられているので，その微係数 $f'(x)$ を用いてリアプノフ数を容易に求めることができる。一方，レスラーモデルやローレンツモデルのように微分方程式で表わされるモデルにおいては，アトラクタの構造が数式的に与えられていない以上，その上での運動の指標であるリアプノフ数を求めるには，計算機により軌道の離れ方を求めなければならない。この場合重要なことは，カオスでは少くとも一つのリアプノフ数が正であるために，近接軌道が指数関数的に遠ざかり，近接軌道としての役目を果さなくなることである。したがって，ある程度近接軌道が遠ざかると，別の近接軌道を用意し，基準軌道のほんの近くの離れ方を調べるという手法をとる。この様子を図 4-28 に示す。最初の差ベクトル

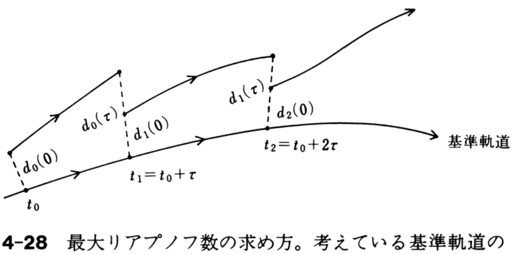


図 4-28　最大リアプノフ数の求め方。考えている基準軌道の近くの離れ方を求めるため，小さな時間 τ だけ近接軌道を発展させた後，方向を保ち距離を $d_i(0)$ $(i=1, 2, \cdots)$ まで引き戻す。近接軌道との差は順次発展しやすい方向に伸び，最大リアプノフ数が求まる。

$\boldsymbol{d}_0(0)$ が短い時間の τ の間に $\boldsymbol{d}_0(\tau)$ に発展したとする。このとき，$\boldsymbol{d}_0(\tau)$ の方向はそのままで，長さを $\boldsymbol{d}_0(0)$ と同じ長さに縮め $\boldsymbol{d}_1(0)$ とする。すなわち，

$$\boldsymbol{d}_1(0)=|\boldsymbol{d}_0(0)|\cdot\frac{\boldsymbol{d}_1(\tau)}{|\boldsymbol{d}_1(\tau)|}$$

である。ここで，$|\ \ |$ はベクトルの長さを表わす。このようにして順次ベクトル $\boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3, \cdots$ をつくってゆくと，近接軌道(複数)のつくり方は最も基準軌道から離れやすい方向にたえずとってあるので，こうして

$$\lambda_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\log\frac{|\boldsymbol{d}_i(\tau)|}{|\boldsymbol{d}_i(0)|} \tag{4-48}$$

は最大リアプノフ数を与える。

前に述べたように，リアプノフ数は相空間の次元の数だけある。n 次元相空間の中に直交する m 個の初期ベクトルの組

$$(\boldsymbol{d}_0^{(1)}(0), \boldsymbol{d}_0^{(2)}(0), \cdots, \boldsymbol{d}_0^{(m)}(0))$$

を用意し，これらを m 個の近接軌道に沿って発展させてゆく。このうち最も大きくなるベクトルを $\boldsymbol{d}_0^{(1)}(0)$ とすると，τ だけ発展させた $\boldsymbol{d}_0^{(1)}(\tau)$ を縮め $\boldsymbol{d}_1^{(1)}(0)$ とする。このとき他のベクトルはもはや $\boldsymbol{d}_1^{(1)}(\tau)$ に対して垂直でないので，グラム・シュミット(Gram-Schmidt)の方法で直交化した後，長さを調節する：

$$\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(1)}(\tau)=\boldsymbol{d}_0^{(1)}(\tau)$$

$$\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(2)}(\tau)=\boldsymbol{d}_0^{(2)}(\tau)-\frac{(\boldsymbol{d}_0^{(2)}(\tau), \boldsymbol{d}_0^{(1)}(\tau))}{|\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(1)}(\tau)|^2}\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(1)}(\tau)$$

$$\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(3)}(\tau)=\boldsymbol{d}_0^{(3)}(\tau)-\frac{(\boldsymbol{d}_0^{(3)}(\tau), \boldsymbol{d}_{0\perp}^{(1)}(\tau))}{|\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(1)}(\tau)|^2}\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(1)}(\tau)-\frac{(\boldsymbol{d}_0^{(3)}(\tau), \boldsymbol{d}_{0\perp}^{(2)}(\tau))}{|\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(2)}(\tau)|^2}\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(2)}(\tau)$$

ここで，$(\ ,\ )$ はベクトルの内積を表わす。

一般に，$\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(2)}(\tau)=\boldsymbol{d}_\perp^{(2)}$ などと略記して

$$\boldsymbol{d}_\perp^{(k)}=\boldsymbol{d}^{(k)}-a_{k,1}\boldsymbol{d}_\perp^{(1)}-a_{k,2}\boldsymbol{d}_\perp^{(2)}-a_{k,3}\boldsymbol{d}_\perp^{(3)}-\cdots-a_{k,k-1}\boldsymbol{d}_\perp^{(k-1)} \tag{4-49}$$

と書ける。ここで，

$$a_{k,i}=\frac{(\boldsymbol{d}^{(k)}, \boldsymbol{d}_\perp^{(i)})}{|\boldsymbol{d}_\perp^{(i)}|^2}$$

である。その後，$\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(1)}(\tau)$，$\boldsymbol{d}_{0\perp}^{(2)}(\tau), \cdots, \boldsymbol{d}_{0\perp}^{(m)}(\tau)$ の長さを調節した基底

$$\boldsymbol{d}_1{}^{(i)}(0)=\frac{|\boldsymbol{d}_0{}^{(i)}(0)|}{|\boldsymbol{d}_{0\perp}{}^{(i)}(\tau)|}\boldsymbol{d}_{0\perp}{}^{(i)}(\tau) \qquad (4\text{-}50)$$

をつくる。このような操作を繰り返しつつ

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{|\boldsymbol{d}_k{}^{(1)}(\tau)\wedge\boldsymbol{d}_k{}^{(2)}(\tau)\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}_k{}^{(m)}(\tau)|}{|\boldsymbol{d}_k{}^{(1)}(0)\wedge\boldsymbol{d}_k{}^{(2)}(0)\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}_k{}^{(m)}(0)|}$$

を求める。ただし，$\wedge$ はベクトルの外積で，$|\boldsymbol{d}^{(1)}\wedge\boldsymbol{d}^{(2)}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{d}^{(m)}|$ はベクトル，$\boldsymbol{d}^{(1)},\boldsymbol{d}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{d}^{(m)}$ を辺とする平行 m 面体の体積を表わす。この式において $m=1,2,3,\cdots,n$ とすれば

$$\lambda_1,\ \lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ \cdots,\ \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

が順次求まり，これより個々のリアプノフ数すべてが決定される。

以上の方法は，島田，長島(知正)(1979)によって開発された。この方法によるローレンツモデルのリアプノフ数の解析を図 4-29 に示す。また，表 4-1 にレスラーモデルのリアプノフ数の収束の様子を示す。

今まで述べた方法は，カオスの方程式が与えられた場合の解析法であったが，実験で得たランダム信号のように方程式が不明の場合はどうするの

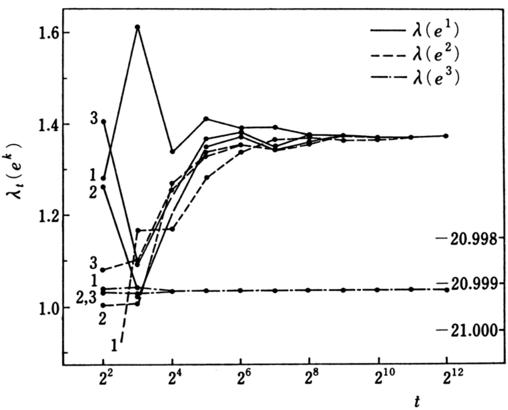


図 4-29　(4-49), (4-50)により，リアプノフ数を求めた例。ローレンツモデル(4-21)における計算でパラメターは，$\sigma=16.0$, $b=4.0$, $r=40.0$ である。時間 t に対する $\lambda(e^1)=\lambda_1$，$\lambda(e^2)=\lambda_1+\lambda_2$，$\lambda(e^3)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ の収束の様子を示す。結果としては $\lambda_1=1.73$，$\lambda_2=0.00$，$\lambda_3=-22.37$ が得られる。[I. Shimada and T. Nagashima : Prog. Theor. Phys. **61**(1979)1605 より]

表 4-1 レスラーモデル(4-20)における計算の実行時間とリアプノフ数の収束(μ=5.7)

t	λ_1	λ_2	λ_3
2	0.101887	0.066053	−4.701911
4	0.077659	0.105560	−8.167513
8	0.160811	−0.006103	−5.302206
16	0.139433	0.017708	−6.122024
32	0.125435	0.004908	−5.461852
64	0.114208	0.008219	−5.600146
128	0.094053	0.002615	−5.497208
256	0.083119	0.001381	−5.437145
512	0.090574	−0.000382	−5.396670
1024	0.081649	−0.000373	−5.399836
2048	0.076505	−0.000365	−5.393630
4096	0.073376	−0.000102	−5.388497
8192	0.072709	−0.000074	−5.388979
16384	0.071962	−0.000042	−5.387793
32768	0.071989	−0.000022	−5.387947
65536	0.071931	0.000005	−5.388200
131072	0.071637	−0.000001	−5.387857

か。いくつかの工夫があるが，ここでは，佐藤，佐野，沢田(1987)らによる最大リアプノフ数を求める方法を示す。

実験で得られるデータにより，アトラクタを 4.4 節の方法で作る。この軌道を等時間間隔でサンプリングすると，アトラクタ上に点の集合ができる。この点の中でなるべく近い 2 点 $\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{y}_i$ のペアをつくり，この 2 点の時間変化を追いながら τ 間隔の距離の比

$$\Lambda_i(t,\tau)=\frac{|\boldsymbol{x}_i(t+\tau)-\boldsymbol{y}_i(t+\tau)|}{|\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{y}_i(t)|} \tag{4-51}$$

をつくり，これを多くのペア i について平均操作を次のように行う:

$$\langle\log\Lambda(t,\tau)\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\Lambda_i(t,\tau) \tag{4-52a}$$

これにより，τ の間のリアプノフ数に相当する量

$$\lambda(t,\tau)=\frac{1}{\tau}\langle\log\Lambda(t,\tau)\rangle \tag{4-52b}$$

を求める。この量は最大アリプノフ数の評価となる(図 4-30)。

より複雑な方法としては，方程式 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ の線形化された方程式

(a)

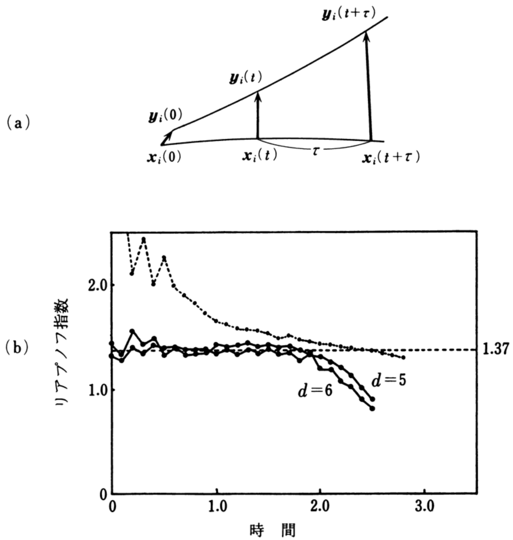


図 4-30　(a) 実験データより最大リアプノフ数を求める一方法。(4-51), (4-52)の方法の説明図。(b) この方法によりローレンツモデルのリアプノフ数を求めたもので，一度方程式により数値データをつくっておき，それらを基に実験と同じ手法で求める。モデル中のパラメターは図 4-29 と同じ。[S. Sato, M.Sano and Y. Sawada : Prog. Theor. Phys. **77**(1987)1 より]

$\dot{\boldsymbol{\xi}} = T(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\xi}$ を考える。ここで，T は $\boldsymbol{F}$ からつくられる行列で，$(i\ j)$ 要素は，$T_{ij}=\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ で与えられる。

実験データから，この線形化された方程式を最適推定する方法が，佐野，沢田(1985)によって与えられている。

次に，1 章で述べたローレンツプロットの方法やレスラーモデルで示したように，ポアンカレ断面を解析して，点の位置 x_i よりポアンカレリターンマップ(x_i, x_{i+1})を作り，1 次元写像を得たとする。この実験的に得られた写像を一つの線で近似する。近似する方法としては，全体を一つの高次多項式で書くとどこかに無理が生ずるので，全体をよく合わせるためには，いくつかの区間に分割し，次数の低い多項式で近似し，区間端点での

接続も多項式の次数に応じた滑らかさで行う。このようにして得た近似写像 $f(x)$ を用い，(2-18)

$$\lambda=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\log|f'(x_i)|$$

を求めれば，リアプノフ数を得ることができる。

また，この写像 $f(x)$ を用いて，計算機不変測度を求めて，これを実験結果と比較して，$f(x)$ で近似したことの妥当性を評価することもできる。

いずれにしろ，実測された系よりアトラクタの次元や，リアプノフ数，次節で述べる大域的スペクトラムを求めるには，質の良い(S/N(signal to noise ratio，信号対雑音比)の高く，経時変化のない)長時間信号が必要なのである。

4.8 大域的スペクトラム——$f(\alpha)$ の方法——

最近，より複雑なフラクタル的構造の全体像を定量化する方法が考えられ，カオスのみならず多分野に利用されている。

簡単な例から始める。図 4-31 のように場所により点の存在確率の異なるカントール集合を考える。(4-33)の一般化次元 D_q は，$C_n{}^p$ を考えて

$$D_q=\frac{1}{q-1}\frac{\log(p_1{}^q+p_2{}^q)^n}{\log \ell^n}=\frac{1}{q-1}\frac{\log(p_1{}^q+p_2{}^q)}{\log \ell} \qquad (4\text{-}53)$$

となる。ここでは $p_1=\dfrac{1}{3}$，$p_2=\dfrac{2}{3}$，$\ell=\dfrac{1}{3}$ ととり，D_q の q に対するグラフを書くと図 4-32 のようになる。このように D_q は $D_{-\infty}$ から D_∞ まで連続に分布し，$q=-\infty$ では確率の小さい部分からの寄与があり，反対に，q の大きいところでは確率の大きな部分を反映している。q はこのように確率のある部分を取り出すフィルタ(filter)の役割を果す。

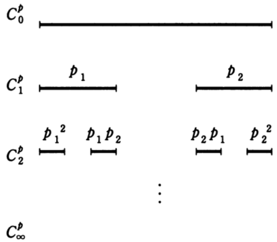


図 4-31 存在確率の異なるカントール集合 C_∞^p の形成。以下，$p_1=\dfrac{1}{3}$，$p_2=\dfrac{2}{3}$ とする。

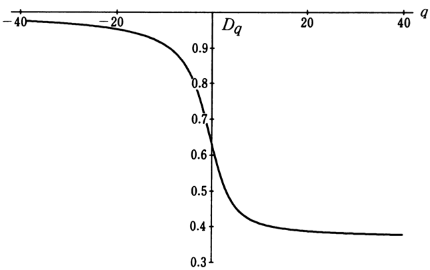


図 4-32 図 4-29 の場合の一般化次元 D_q

図 4-31 において，n 段目の確率は線分の右から順に

$$p^{(n)}=p_1{}^m p_2{}^{n-m} \qquad (m=0,1,2,\cdots,n)$$

である。ここで，ℓ 段目の線分の長さを $\ell^{(n)}$ とし

$$p^{(n)}=(\ell^{(n)})^{\alpha} \tag{4-54}$$

なる量 α を考えると，α は局所的な次元の意味をもつことがわかる。なぜなら $\alpha=1$ ならば，確率は線の長さに比例し，$\alpha=2$ ならば平方に比例するからである。もちろんここでは一般的に非整数次元を考える。この α はしばしば**シンギュラリティ**(singularity，局所次元)とよばれるが，これは発案者ハルセー達の使った呼び名によるものである。

次に，局所次元 α の線分の個数 N の分布をそのままの形で示すのではなく，

$$N=(\ell^{(n)})^{-f(\alpha)} \tag{4-55}$$

と表わす。これは α の次元をもつ要素の容量次元となり，N が増加すれば $f(\alpha)$ も増加する。この例の場合の α と $f(\alpha)$ を求めてみよう。

$$\ell^{(n)}=\ell^n \ \ (\ell<1), \qquad p^{(n)}=p_1{}^m p_2{}^{n-m}=(\ell^n)^{\alpha}$$

より，

$$\alpha=\frac{m\log p_1+(n-m)\log p_2}{n\log \ell}=\frac{X\log p_1+(1-X)\log p_2}{\log \ell} \tag{4-56}$$

となる。ただし，$X=\dfrac{n}{m}$ $(0\leqq X\leqq 1)$ とおいた。

一方，個数に関しては，$N={}_n\mathrm{C}_m$ はスターリング(Stirling)の公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

を用いると，

$$N={}_n\mathrm{C}_m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$$\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\cdot\frac{n^n}{m^m(n-m)^{n-m}} \tag{4-57}$$

となり，この量は $m=\dfrac{2}{n}$ で最大となる。

n の大きなところでは漸近的に

$$f(\alpha)=-\log N=\frac{X\log X+(1-X)\log(1-X)}{\log \ell} \tag{4-58}$$

となる。これらの式を用い，$p_1=\dfrac{1}{3}$，$p_2=\dfrac{2}{3}$，$\ell=\dfrac{1}{3}$ とし，X を補助変数として $f(\alpha)$ のグラフを描くと，図 4-33 のようになる。この場合の局所次元 α は

$$\alpha_{\min}=D_\infty=\frac{\log\frac{3}{2}}{\log 3}=0.36907\cdots$$
$$\alpha_{\max}=D_{-\infty}=\frac{\log 3}{\log 3}=1 \tag{4-59}$$

の間に分布している。

この例に対し，確率の等しいカントール集合では，$f(\alpha)$ 曲線は

$$\alpha=\frac{\log p}{\log \ell}=\frac{\log 2}{\log 3}$$
$$f(\alpha)=\frac{\log N}{\log \ell}=-\frac{\log 2^n}{\log\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{\log 2}{\log 3} \tag{4-60}$$

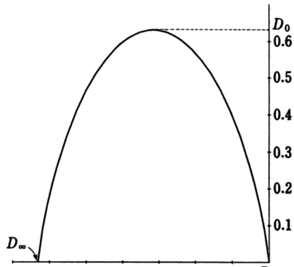


図 4-33　図 4-29 に対する $f(\alpha)$ スペクトラム。確率の等しい通常のカントル集合は $\alpha=0$ における D_0 一点である。

の一点のみとなる。

このように，この $f(\alpha)$ の方法は不均一に分布した集合の全体像を示すのに適しており，今までの一つの次元を求める方法に比べて，はるかに得られる情報量が多い。また実際にモデル方程式や測定で得られるフラクタル構造は不均一性が存在し，次元の分布を求めたほうが対象の全体像をとらえられることから，近年カオスのみならずフラクタル的構造の出現する多くの分野で利用されつつある。この方法は**大域的スペクトラム**(global spectrum)**の方法**，または単に**エフ・アルファの方法**とよばれている。

実際の測定でどのように $f=f(\alpha)$ の関係を求めるかというと，時系列データよりアトラクタを復活させ，前に説明したように(4-45)を用いて一般化次元 D_q を算出する。 この D_q より，後に説明する方法で，$\alpha(q)$，$f(\alpha(q))$ を求めればよい。

次に，長さの不均一な分割のカントール集合について考えてみよう。

問 13 図 4-34 において

$$\alpha=\frac{\log p}{X\log \ell_1+(1-X)\log \ell_2}$$
$$f(\alpha)=\frac{X\log X+(1-X)\log(1-X)}{X\log \ell_1+(1-X)\log \ell_2} \tag{4-61}$$

となることを示せ。また，$p=1/2$，$\ell_1=1/4$，$\ell_2=1/2$ とし，$f(\alpha)$ を α に対しプロットせよ。

この場合，$\alpha_{\min}=\dfrac{\log 2}{\log 4}=0.5$，$\alpha_{\max}=\dfrac{\log 2}{\log 2}=1$ となる。

さて，この例の一般化次元 D_q は分割が等しい(4-33)では与えられない。この拡張は，次のように行われる。(4-33)を変形して

$$\lim_{\ell\to 0}\frac{\sum p_i{}^q}{\ell^{(q-1)D_q}}=1 \tag{4-62}$$

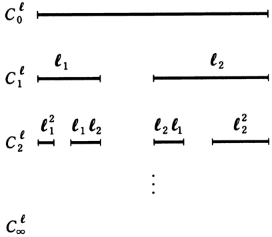


図 4-34 長さの異なるカントール集合 C_∞^ℓ の形成

と書くことができる。この式を拡張して，$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_n$（$<1$）のサイズの球を考え，その球に点の入る確率を考え

$$\lim_{\ell\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i{}^q}{\ell_i{}^\tau}\right)=1$$

となるような τ を求め，

$$\tau(q)=(q-1)\tilde{D}_q \tag{4-63}$$

の関係より次元を求める。このように拡張された $\tilde{D}_q$ は，$\ell_1=\ell_2=\cdots=\ell_n$ の場合には(4-33)の D_q に一致し，それ以外の場合には，これより小さくなることが示せる。これからは $\tilde{D}_q$ を単に D_q と表わすこととする。

カントール集合に話を戻すと，図 4-31 の場合は自己相似性より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p^q}{\ell_1{}^\tau}+\frac{p^q}{\ell_2{}^\tau}\right)^n=1, \tag{4-64}$$

すなわち条件は，

$$\frac{p^q}{\ell_1{}^\tau}+\frac{p^q}{\ell_2{}^\tau}=1$$

となり，$p=\dfrac{1}{2}$，$\ell_1=\dfrac{1}{4}$，$\ell_2=\dfrac{1}{2}$ として与えられた q に対して，この式をニュートン法で解き，D_0 を求めると，

$$D_{-\infty}=\frac{\log p}{\log \ell_1}=0.5, \qquad D_\infty=\frac{\log p}{\log \ell_2}=1$$

をつなぐ曲線が得られる。

“分配関数” $\Gamma(q,\ell)$ を

$$\Gamma(q,\ell)=\sum_i p_i(\ell)^q \tag{4-65}$$

とおくと，

$$D_q=\lim_{\ell\to 0}\frac{1}{q-1}\frac{\log \Gamma(q,\ell)}{\log \ell}$$

であり，ℓ が小さいところで

$$\Gamma(q,\ell)\sim \ell^{(q-1)D_q}=\ell^{\tau(q)} \tag{4-66}$$

となる。

次に D_q と α，$f(\alpha)$ の関係を求めておこう。α が $\alpha'+d\alpha'$ の間の値をとる軌道の個数 $N(\alpha')d\alpha'$ は，$\rho(\alpha')$ を適当な重みとして

$$N(\alpha')d\alpha' \sim d\alpha'\rho(\alpha')\ell^{-f(\alpha')}$$

と書ける。よって，$\Gamma(q,\ell)$は

$$\Gamma(q,\ell)=\int \ell^{q\alpha'}\ell^{-f(\alpha')}\rho(\alpha')d\alpha'$$

となる。後に $\ell\to 0$ の極限をとるのであるから，$q\alpha'-f'(\alpha')$ が最小となる $\alpha'=\alpha(q)$ の値のみが積分に寄与することとなる。$\Gamma(q,\ell)$ を具体的に鞍点法(suddle point method)(付録4B参照)で計算すると

$$\Gamma(q,\ell)\fallingdotseq\sqrt{\frac{2\pi}{(\log\ell)f''(\alpha)}}\rho(\alpha)\,\ell^{q\alpha-f(\alpha)} \tag{4-67}$$

となる。ただし，α は

$$\frac{d}{d\alpha'}(q\alpha'-f(\alpha'))=0 \tag{4-68}$$

を与える α の値であり，q の関数であるので，$\alpha=\alpha(q)$ と書かれる。またここでは，このような α の値がただ一つのみ存在すると仮定する。

仮定より，

$$\frac{d^2}{d\alpha'^2}(q\alpha'-f(\alpha'))\bigg|_{\alpha=\alpha(q)}>0. \tag{4-69}$$

これらの式より

$$\begin{aligned}f'(\alpha(q))&=q\\ f''(\alpha(q))&<0\end{aligned} \tag{4-70}$$

が得られる。

次に，D_q を求めると，

$$D_q=\lim_{\ell\to 0}\frac{1}{q-1}\frac{\log\Gamma(q,\ell)}{\log\ell}. \tag{4-71}$$

この $\Gamma(q,\ell)$ に(4-67)を代入し，$\displaystyle\lim_{\ell\to 0}\frac{\log(\log\ell)}{\log\ell}=0$ を用いると

$$D_q=\frac{1}{q-1}\{q\alpha(q)-f(\alpha(q))\}, \tag{4-72a}$$

または，

$$f(\alpha)=q\alpha-\tau(q) \tag{4-72b}$$

の関係が得られる。

また，$\alpha(q)$ に関しては

$$\alpha(q)=\frac{d}{dq}\{(q-1)D_q\}=\frac{d}{dq}\tau(q) \tag{4-73}$$

が成立する。

問 14 (4-73)を示せ。

以上のことより，$f(\alpha)$ 曲線は次の性質をもつことがわかる。

（1） $q=0$ に対して，$f'(\alpha(0))=0$，また $f(\alpha(0))=D_0$.

（2） $q=1$ に対して，$f(\alpha(1))=\alpha(1)=D_1$ であり，$f'(\alpha(1))=1$, $f''(\alpha(1))<0$ より，曲線 $f=f(\alpha)$ は，点 $(\alpha(1), f(\alpha(1)))$ で $f=\alpha$ に接し，この点以外では，$\alpha>f(\alpha)$ となる。またこのことは，

$$\frac{dD_q}{dq}=\frac{f(\alpha)-\alpha}{(q-1)^2}<0 \qquad (q\neq 1) \tag{4-74}$$

となり，D_q の単調減少性を示している。

さて，これらの関係式をどのように使うか，図 4-31 に示した確率の異なるカントール集合の場合について示そう。

(4-53) の D_q の表示を (4-73) に代入し，微分を計算することにより，

$$\alpha(q)=\frac{p_1{}^q \log p_1+p_2{}^q \log p_2}{(p_1{}^q+p_2{}^q)\log \ell} \tag{4-75}$$

となり，この式と D_q を (4-72) に代入して

$$f(\alpha(q))=q\frac{p_1{}^q \log p_1+p_2{}^q \log p_2}{(p_1{}^q+p_2{}^q)\log \ell}-\frac{\log(p_1{}^q+p_2{}^q)}{\log \ell} \tag{4-76}$$

となる。これらの結果は (4-56), (4-58) と同一であることが示すことができる。そのためには

$$X=\frac{p_1{}^q}{p_1{}^q+p_2{}^q}$$

とおけば

$$f(\alpha(q))=\frac{p_1{}^q\log p_1{}^q+p_2{}^q\log p_2{}^q-(p_1{}^q+p_2{}^q)\log(p_1{}^q+p_2{}^q)}{(p_1{}^q+p_2{}^q)\log \ell}$$

より明らかである。問 14 でわかるとおり，(4-72) を導いた鞍点法と，正確解にスターリング式の近似をしたものは同じ結果を与えている。

問 15 ガンマ関数 $\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^n dx$ に鞍点法を用いることにより，スターリングの公式 $n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ を導け。

この $f(\alpha)$ 法の実際的応用として，ロジスティック写像の熊手型分岐点の集積点における集合の $f(\alpha)$ 曲線，およびマグノンカオスの実験より求めた点を図 4-35 に示しておく。この図の α の範囲は，3 章で述べた周期倍化現象の定数

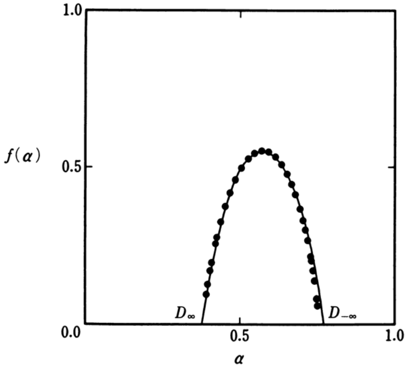


図 4-35 ロジスティック写像 $x_{n+1}=L_R(x_n)=Rx_n(1-x_n)$ の $R=R_\infty=3.5699456\cdots$ における $f(\alpha)$ スペクトラムとマグノンカオスによる実験点。磁性体としては YIG を使用 [S. Mitsudo, M. Mino and H. Yamazaki: J. Magn. Magn. Mater. **104-107**(1992)1057 より]

$$\alpha_{\rm PD}=2.502907875\cdots$$

を用いて

$$\begin{aligned}\alpha_{\min}=D_\infty&=\frac{\log 2}{\log \alpha_{\rm PD}{}^2}=0.3775\cdots\\ \alpha_{\max}=D_{-\infty}&=\frac{\log 2}{\log \alpha_{\rm PD}}=0.7555\cdots\end{aligned}\tag{4-77}$$

の間であることがわかる。

問 16 3章で述べた周期倍化の説明より，この集積点の集合は近似的にいえば，図 4-34 に示した長さを不均一に分割するカントール集合において，$\ell_1=1/\alpha_{\rm PD}$, $\ell_2=1/\alpha_{\rm PD}{}^2$ のカントール集合で表わされる(要素の並び順は異なるが)。この場合の $f(\alpha)$ の曲線を求め，図 4-35 に示した結果と比較せよ。

最後に $f(\alpha)$ の実験例として，イエンセン(M. H. Jensen)らの初めての試みを紹介する。実験系は水銀によるベナール対流† であり，外力を電磁

† 液体を下から暖めると対流運動が生ずる。浅い容器の場合，表面や容器の形に応じた空間的なパターンが生じ，これはベナール(Benard)対流とよばれる。上が固体境界の場合には，安定なロール状のパターンが生ずるが，温度差が大きくなると，このロールが不安定化しカオスとなる。

的に加えている。外力の周波数は，本来のベナール対流の振動数の黄金分割比（$=(\sqrt{5}-1)/2$）にとってある。この場合のアトラクタを図 4-36(a)に示してある。図 4-36(b)に，このアトラクタより求めた $f(\alpha)$ の点を示してあるが，解析方法としては，アトラクタを区間 ℓ に分割し，(4-65)の $\Gamma(q,\ell)$ を

$$\Gamma(q,\ell)=\langle p_i(\ell)^{q-1}\rangle$$

のように軌道についての平均をとるのであるが，この平均を軌道の同区間への再帰時間 m_i の逆数で置き換え，これと(4-66)の関係より $\tau(q)$ を求める。すなわち

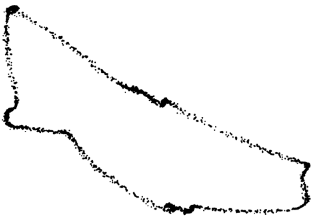
$$\Gamma(q,\ell)=\langle m_i^{1-q}\rangle \sim \ell^{\tau(q)}.$$

この $\tau(q)$ が q の関数として与えられると

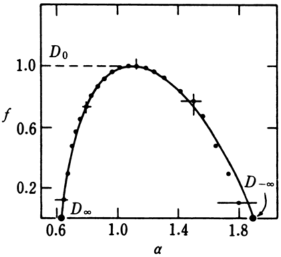
$$\alpha(q)=\frac{d}{dq}\tau(q), \qquad f(\alpha)=q\alpha(q)-\tau(q)$$

より，α と $f(\alpha)$ の関係が得られる。

実験結果は，サークルマップに基づいた解析(実線)と比べてよく一致している。



(a)



(b)

図 4-36　ベナール対流の実験より得られた，(a) 2次元のアトラクタ，(b) $f(\alpha)$特性。ドットは実験から求めたもので，曲線は理論である［M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia and J. Stavans: Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2798 より］

付　　録

1A　ロジスティック写像の周期解

$x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$ の周期解は次のように求めることができる。

$x_n=\sin^2\theta_n$ とおくと

$$\sin^2\theta_{n+1}=4\sin^2\theta_n\,(1-\sin^2\theta_n)$$
$$=4\sin^2\theta_n\cos^2\theta_n=\sin^2 2\theta_n$$

写像 x_n を p 回行った点 x_{n+p} を考えると，

$$\sin^2\theta_{n+p}=\sin^2 2^p\theta_n$$

となる。これより

$$\theta_{n+p}=\pm 2^p\theta_n+m\pi.$$

また，p 周期点の条件より，

$$x_{n+p}=\sin^2\theta_{n+p}=x_n=\sin^2\theta_n$$

であるから，

$$\theta_{n+p}=\pm\theta_n+m'\pi. \qquad \therefore\quad \pm\theta_n+m'\pi=\pm 2^p\theta_n+m\pi$$

$$\therefore\quad (2^p\pm 1)\theta_n=(m-m')\pi=\ell\pi \qquad \therefore\quad \theta_n=\frac{\ell\pi}{2^p\pm 1}$$

例えば，$p=2$（周期），$\ell=1$ とすると

$$\theta_n=\frac{\pi}{2^2\pm 1}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}; & x_1=\sin^2\dfrac{\pi}{3}=0.75\ \text{（1 周期）}\\[2ex] \dfrac{\pi}{5}; & x_1=\sin^2\dfrac{\pi}{5}=0.3454915028\\ & x_2=0.9045084972\ \text{（2 周期）}\end{cases}$$

次に，3周期解を求めると，$p=3$，$\ell=1$として

$$\theta_n=\frac{\pi}{2^3\pm 1}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{7}\,; & x_1=\sin^2\dfrac{\pi}{7},\ x_2=\sin^2\dfrac{2\pi}{7},\ x_3=\sin^2\dfrac{4\pi}{7}\\[2mm] \dfrac{\pi}{9}\,; & x_1=\sin^2\dfrac{\pi}{9},\ x_2=\sin^2\dfrac{2\pi}{9},\ x_3=\sin^2\dfrac{4\pi}{9}\end{cases}$$

ここで，

$$x_1=\sin^2\frac{\pi}{7}=0.1882550991,\qquad x_1=\sin^2\frac{\pi}{9}=0.116977784$$

2A　メビウスの関数と反転公式

関数f，gを自然数全体を定義域とし，すべての$n\geqq 1$に対して，

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

の関係を満たすものとする。ただし，ここでの和は，nの約数であるすべてのdについてとる意味である。このとき，メビウス関数μを用いると，fをgによって次のように表わせる。これを**メビウスの反転公式**という：

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$$

メビウス関数は，自然数を定義域とする関数で，$\mu(1)=1$，nが相異なる$k(\geqq 1)$個の素数の積$p_1p_2\cdots p_k$ならば，$\mu(n)=(-1)^k$，nが1以外の平方数を約数にもてば，$\mu(n)=0$，によって定義される。例えば，$\mu(3)=-1$，$\mu(6)=1$，$\mu(9)=0$，$\mu(12)=0$である。反転公式の証明については，初等整数論の書物を参照されたい。

さて，テント写像$T(x)$の場合，$T^n(x)=x$の解の個数は2^n個ある。$A(d)$をd周期点の総数とすると，

$$\sum_{d|n}A(d)=2^n$$

が成立している。ここで，メビウスの反転公式において，$g(n)=2^n$，$f(d)=A(d)$とすれば，

$$A(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)2^d$$

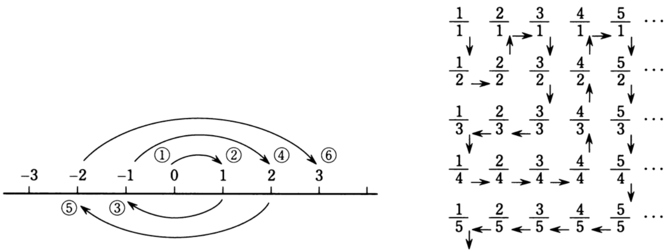
となる。

2B　可算集合と非可算集合

非可算集合とは，無限集合であって可算集合でないものをいう。それでは，可算集合とは何か？　それを理解するためには，集合の濃度の概念が必要である。有限集合ならば，**濃度**とはその集合の要素全体の個数のことである。個数の等しい二つの集合は，濃度が等しい。無限集合の場合には，‘何らかの方法によって’，その要素間に1対1の対応がつけられる二つの集合は濃度が等しいと考える。例えば，自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ と偶数全体の集合 $\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ とは（$\boldsymbol{N}$ のほうが2倍の濃度をもつと考えるかも知れないが，無限集合の場合には，有限集合の世界とはかなり様子が異なり），1と2，2と4，3と6，…，n と $2n$，…とを対応させることによって，1対1の対応が両者間につけられるので，濃度は等しい。また，$\boldsymbol{N}$ と平方数全体 $\{1,4,9,\cdots,n^2,\cdots\}$ ですら，n と n^2 を対応させることにより，同じ濃度をもつことがわかる。こうしたことを最初に考えたのは，ガリレイ(G. Galilei)(1564-1642)であり，それを発展させて無限集合の理論を創り上げたのは，カントール(G. Cantor)(1845-1918)だった。

この二つの例以外に，$\boldsymbol{N}$ と同じ濃度をもつ無限集合の例としては，整数全体の集合，有理数全体の集合，代数的数† 全体の集合などがある。

自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ と1対1の対応がつけられるということは，その



(a)　整数の番号づけ

(b)　正の有理数の番号づけ
（既約分数にしても同様にできる）

図 2B-1

† 整係数の方程式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ ($n\geqq1$)の解を代数的数といい，整数，有理数，べき根を含む。

集合の要素が 1, 2, 3, ・・・と数えられる(＝番号がつけられる)ことを示すので，そうした集合を**可算集合**とか**可付番集合**(countable set)とかいう。これは無限集合のなかで，もっとも濃度の低い集合である。可算集合の次の濃度は，実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の濃度であると考えられている†。この濃度の集合を**連続体**(continuum)という。実は，ここでも常識に反することが起こっている。$\boldsymbol{R}$(＝数直線)と線分 $[0,1]$ の濃度は等しく，それはまた，正方形($[0,1]\times[0,1]=[0,1]^2$)の濃度とも等しく，さらにそれは，立方体 $[0,1]^3$ の濃度とも等しい，・・・。

リ・ヨークの定理に出てきた攪拌集合 S は，$\boldsymbol{R}$ の非可算な部分集合であるから，連続体である。連続体のもう一つの例として，**カントール集合**を挙げておこう。カントール集合は，区間 $[0,1]$ を 3 等分して真中の開区間 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ を取り除き，次に残りの二つの区間 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},1\right]$ をそれぞれ 3 等分して真中の開区間 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ を取り除く。次に残りの四つの区間 $\left[0,\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9},1\right]$ をそれぞれ 3 等分して真中の開区間を取り除く，といった操作を無限に繰り返したときの残りの点全体からなる集合である。この集合は，その構成の仕方から，3 進法で表わしたときに，0 と 2 だけからなる数全体の集合

$$\{x=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots \mid x_n=0,2\ ;\ n\geqq 1\}$$

になる。これは区間 $[0,1]$ の点を 2 進法で表わした集合

$$\{y=0.y_1y_2\cdots y_n\cdots \mid y_n=0,1\ ;\ n\geqq 1\}$$

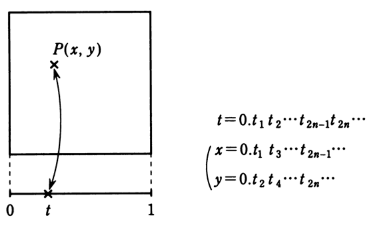


図 2B-2　線分 $[0,1]$ と正方形 $[0,1]\times[0,1]$ の 1 対 1 対応

† 可算濃度と連続体の濃度の中間の濃度(の集合)は存在しない，というのは仮説である(連続体仮説)。

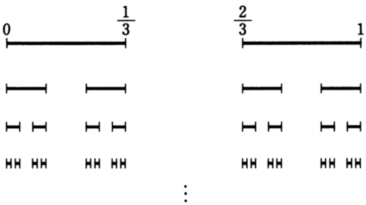


図 2B-3　カントール集合の構成

と1対1に対応づけられる(例えば，カントール集合の点 0.220200… と 0.110100… とを対応させる，というように2を1に，または，1を2に読みかえればよい)ので，連続体である。しかし，この集合は長さ(＝測度(付録2D参照))をもたない。それは次々に取り除いて行く区間の長さの合計が，

$$\frac{1}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+2^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$$

となるからである。

2C　上極限，下極限

数列の極限が必ずしも存在しないときに，その代りをするのが上極限や下極限である。実例で説明しよう。数列 $\left\{\sin^2\frac{n\pi}{6}+\frac{1}{n}\right\}$ は，n が大きくなると，$0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1$ の近くの値を一定の順番に従ってとり，それらは $n\to\infty$ のとき，この四つの値に‘収束する’。この数列には極限が存在しないけれども，**部分列**を取れば，それはこの四つの値のいずれかに収束する。例えば，$a_n=\sin^2\frac{n\pi}{6}+\frac{1}{n}$ としたとき，数列 $a_6, a_{12}, a_{18}, \cdots, a_{6n}, \cdots$ は0に収束する。このようなとき，これらの値をもとの数列 $\{a_n\}$ の**集積点**という。そして，集積点の値の最大のものを**上極限**(upper limit)，最小のものを**下極限**(lower limit)といい，それぞれ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ または，$\limsup_{n\to\infty} a_n$，$\liminf_{n\to\infty} a_n$ で表わす。上の例では，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=1$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=0$ である。集積点が一つしかない場合には，この両者は同じものであり，そのときには数列は極限をもつことになる。以下に，数列の上極限，下極限の例を挙げておく。

（1）　$a_n=(-1)^n+\frac{1}{2^n}$　　$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=1,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=-1\right)$

（2）　$a_n=\sin^2\frac{n\pi}{4}+\frac{1}{n}$　　$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=1,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=0\right)$

（3）　$a_n=\sin^2\frac{n\pi}{4}$　　$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=1,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=0\right)$

（4）　数列 $\{1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,\cdots\}$ は，すべての自然数を集積点としてもつ。$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=\infty,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=1\right)$

2D　ルベーグ測度

ルベーグ測度は，長さや面積や体積の概念を一般化したものであるが，幾何学的イメージを描きやすいので，平面上の集合（＝平面図形）のルベーグ測度について考える。

正方形 I に含まれる集合 E を，高々可算個（＝有限個，または可算無限個）の長方形 $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$ で覆う（図 2D-1）。そのとき，これらの長方形の面積 $|I_n|$ の合計 $\sum_{n\geqq 1}|I_n|$ は，E の覆い方によって変わるだろう。E のあらゆる覆い方に対する $\sum_{n\geqq 1}|I_n|$ の下限† を E のルベーグ**外測度**（outer measure）といい，$\mu^*(E)$ で表わす：

$$\mu^*(E)=\inf\sum_{n\geqq 1}|I_n|$$

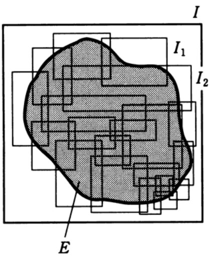


図 2D-1

† 実数の集合 E の最小値を一般化したものが**下限**（infimum）である。最小値があればそれ自身を，最小値がないときには，例えば，集合 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ の 0 や，区間 $(-1, 1)$ の -1 のようなものを，これらの集合の下限といい，$\inf E$ で表わす。同様に最大値を一般化したものを**上限**（supremum）といい，例えば，$\sup(-1, 1)=1$ のように表わす。

通常の図形の場合，その図形の面積と外測度(実はこのときには，外測度＝測度)とは一致する(図 2D-2)。

次に，集合 E のルベーグ**内測度**(inner measure)を導入するが，外測度 $\mu^*(E)$ が E を外側から大きめに測っているのに対し，内測度は E を内側から小さめに測る。さて，E の正方形 I に対する補集合 $I-E$ の外測度 $\mu^*(I-E)$ を正方形の面積 $|I|$ から引いたものを E のルベーグ内測度といい，$\mu_*(E)$ で表わす：

$$\mu_*(E)=|I|-\mu^*(I-E)$$

集合 E はその外測度と内測度が一致するときに，**ルベーグ可測**(measurable)といい，その値を $\mu(E)\,(=\mu^*(E)=\mu_*(E))$ で表わし，E の**ルベーグ測度**(measure)という。他の測度を考えないかぎり，ルベーグ(フランスの数学者 H. Lebesgue(1875-1941))の名を省いて，単に外測度，内測度，可測，測度ということが多い。

通常の図形は可測であり，その測度がその図形の面積と一致する。可測でない集合 E に対しては，$\mu_*(E)<\mu^*(E)$ である。こうした非可測集合を構成するには集合論の“選択公理”を用いるがその結果を眼に見えるように示すことは難しい。

測度 0 の集合を**零集合**(null set)というが，一般に，

$$0\leqq\mu_*(E)\leqq\mu^*(E)$$

の関係があるので，零集合は外測度 0 の集合といってもよい。例えば，可算集合は零集合である。なぜなら，可算集合を $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ と表わしたとき，任意の正数 ε に対して，E の各点 x_n を面積 $<\frac{\varepsilon}{2^n}$ の長方形 I_n で覆う $(n=1,2,\cdots)$。このとき，明らかに $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ であるから，E はこの可算個の長方形 I_1，$I_2,\cdots$ で覆われ，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\varepsilon$$



図 2D-2　(直角をはさむ二辺)＝2 の直角二等辺三角形

であるから，$\mu^*(E)<\varepsilon$. ε はいくらでも小さく取れるから，$\mu^*(E)=0$ でなければならない。

数直線上の集合(＝実数の集合)の測度を考えるには，正方形・長方形の代りに線分を用い，立体図形(3次元の集合)の場合には，立方体・直方体を用いることによって，平面上の集合の測度と同様に，こうした集合の測度を定義することができる。

実数の集合では，カントール集合が零集合，かつ非可算集合でもある典型的な例である(付録2B)。

2E　正規数

区間 $[0,1]$ の数 x を2進小数で表わした $x=(0.x_1x_2\cdots x_n\cdots)_2$ において，小数点以下第 n 桁までのうちに，0と1が何回出現したかをそれぞれ $N(x,0,n)$，$N(x,1,n)$ で表わす。同様に，$0.x_1x_2\cdots x_n$ のうちの 00，01，10，11 の出現数を $N(x,00,n)$，$N(x,01,n)$，$N(x,10,n)$，$N(x,11,n)$ で表わす(例えば，$x=0.0100011\cdots$ のとき，$N(x,00,7)=2$，$N(x,01,7)=2$，$N(x,10,7)=1$，$N(x,11,7)=1$ である)。同様にして，0と1のあるパターン $a=a_1a_2\cdots a_k$ が，$x=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$ の初めの n 桁のうちに出現した回数を $N(x,a,n)$ で表わす。このとき，すべての k ($\geqq 1$) と，すべての連続した k 個の0,1のパターン(全部で 2^k 個ある) a に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N(x,a,n)=\frac{1}{2^k}$$

が成り立てば，そうした2進小数 x を**2進正規数**(normal number)という。同様に10進正規数，一般に r 進正規数なるものが考えられる。明らかに有理数は循環小数なので正規数にならない。これは，ボレル(É. Borel)が1900年頃導入したもので，彼は任意の r ($\geqq 2$) に対して，$[0,1]$ 区間のほとんどすべての数が r 進正規数であることを証明している。

$0.\underbrace{01}\underbrace{00}\underbrace{01}\underbrace{10}\underbrace{11}\underbrace{000}\underbrace{001}\underbrace{010}\underbrace{011}\underbrace{110}\cdots$ のような数は2進正規数であるが，明らかにランダム(random)とはいえない。ランダムに数字が並んだ乱数† は正規数でなければならないが，逆は真ではない。$\sqrt{2}, e, \pi$ のような“自然な”無理数は，どれ一つ正規数であることが確認されていない。ましてや乱数かどうかは不明である。なお，正規数でない無理数の例はいくらでもつくることができる。

† 乱数は，その数字の配列にいかなる規則性もないものであるが，統計的な規則はもつことになり，正規数であることもその一つである。

例 1　10 進正規数でない 10 進小数の例.　ある特定の数字を欠くような数がそうである。

例 2　3 進正規数でない 3 進小数の例.　カントール集合(付録 2B)に含まれる無理数がある(0 と 2 しか出てこない)。

例 3　2 進正規数でない 2 進小数の例.　$0.1\underbrace{0}_{1\text{個}}1\underbrace{00}_{2\text{個}}1\underbrace{000}_{3\text{個}}1\underbrace{0000}_{4\text{個}}10\cdots$ のように 1 と 1 の間に入る 0 の個数が次第に増加していくような数は，明らかに循環小数でないから無理数であるが，0 と 1 の出現頻度が異なるので 2 進正規数でない。

2F　テント写像と 2 進変換の有限少数初期値に対する周期軌道

テント写像 $T(x)$ の 3 周期軌道を例として考えてみよう。それは，$\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$, $\left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}$ の二つある。この周期軌道をパソコンの画面に描かせようとしたらどうなるだろうか。初期値の $\frac{2}{7}$ や $\frac{2}{9}$ を正確に入力することはできない。$\frac{2}{7}=0.285714$, $\frac{2}{9}=0.222222$ のように丸められて有限小数として処理されてしまう。入力できる初期値は，有限小数しかないのである。

以下では，“任意の N に対して，小数点以下 N 桁の数を初期値とする $T(x)$ の周期軌道は一つしかない”という，やや奇妙にみえる定理について述べる。

> **定 理**　任意の自然数 N に対して，どんな初期値 $x_0=0.a_0a_1\cdots a_{N-1}$ $(a_{N-1}\neq 0, 5)$ に対しても，それらを初期値とする周期軌道は，すべて同じものであり，その周期は $2\cdot 5^{N-1}$ である。

[証明の概略]　はじめに，2 進変換 $B(x)$ について，この問題を考える。$x_0=0.1=\frac{1}{10}$ としよう。そのとき，x_0 を出発する B の軌道は，

$$\frac{1}{10}, \underbrace{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \cdots$$

となり，4 周期軌道になる。0.5 以外の他の小数点以下 1 桁の数を出発する B の軌道は，すべてこの四つの 4 周期点からなる 4 周期軌道となることは容易にわかる。次に，小数点以下 2 桁の数，例えば $x_0=0.23$ を出発する軌道を考えると，それは，

$$\frac{23}{100},\ \frac{23}{50},\ \underbrace{\frac{23}{25},\ \frac{21}{25},\ \frac{17}{25},\ \frac{9}{25},\ \frac{18}{25},\ \frac{11}{25},\ \frac{22}{25},\ \frac{19}{25},\ \frac{13}{25},\ \frac{1}{25},\ \frac{2}{25},\ \frac{4}{25},\ \frac{8}{25},\ \frac{16}{25},\ \frac{7}{25},\ \frac{14}{25},\ \frac{3}{25},\ \frac{6}{25},\ \frac{12}{25},\ \frac{24}{25}},\ \frac{23}{25},\ \cdots$$

となり，20 周期軌道になる。この 20 個の 20 周期点は $\frac{k}{25}$ ($k \neq 5$ の倍数)の形をしている。また，$x_0 = 0.a_0a_1$ ($a_1 \neq 0, 5$)の形の他の初期値を出発点とする $B(x)$の軌道も，この 20 周期点を順番にずらした形の 20 周期軌道に落ち込むことがわかるだろう(確かめよ！)。このことを一般化すると，

"小数点以下 N 桁の数 $x_0 = 0.a_0a_1 \cdots a_{N-1}$ ($a_{N-1} \neq 0, 5$)を出発する $B(x)$の軌道は，$\frac{k}{5^N}$ ($k \neq 5$ の倍数)の形の $4 \cdot 5^{N-1}$ 個の数からなる $4 \cdot 5^{N-1}$ 周期軌道に落ち込む"

となる。このことの証明のポイントは，$B(x) \equiv 2x \pmod 1$から，$x_0 = 0.a_0a_1 \cdots a_{N-1} = \frac{1}{10^N}(10^{N-1}a_0 + 10^{N-2}a_1 + \cdots + a_{N-1})$を出発する軌道は，いずれは $\frac{k}{5^N}$ の形の数に写像され，その後はすべてその形の数の間を動きまわること。p をそのときの周期とすると，p は $\frac{2^p k}{5^N} \equiv \frac{k}{5^N} \pmod 1$を満たす最小の数であり，これから $\frac{(2^p - 1)k}{5^N} \equiv 0 \pmod 1$であり，$k$ は 5 の倍数でないから，$2^p \equiv 1 \pmod{5^N}$となること。最後に，初等整数論の結果から $p = \phi(5^N) = 4 \cdot 5^{N-1}$ となること($\phi(n)$はオイラーの関数であり，n 以下の自然数で，n と互いに素なものの個数を表わす)と，既約分数 $\frac{k}{5^N}$ ($1 \leqq k < 5^N$)の個数がちょうど $4 \cdot 5^{N-1}$ になることから，小数点以下 N 桁の数から出発する B の周期軌道が一つしかないことがわかる。

次に，テント写像 $T(x)$の場合にうつろう。$x_0 = 0.1$ を出発する T の軌道は，

$$0.1 = \frac{1}{10},\ \frac{1}{5},\ \underbrace{\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}},\ \frac{2}{5},\ \cdots$$

となり，2 周期軌道である。$x_0 = 0.23$ のときには，

$$\frac{23}{100},\ \frac{23}{50},\ \frac{23}{25},\ \underbrace{\frac{4}{25},\ \frac{8}{25},\ \frac{16}{25},\ \frac{18}{25},\ \frac{14}{25},\ \frac{22}{25},\ \frac{6}{25},\ \frac{12}{25},\ \frac{24}{25},\ \frac{2}{25}},\ \frac{4}{25},\ \cdots$$

で 10 周期軌道になる。この例からわかることは，$T(x)$の場合には，$0.a_0a_1 \cdots a_{N-1}$ ($a_{N-1} \neq 0, 5$)を出発する周期軌道の周期は，$B(x)$の半分 $2 \cdot 5^{N-1}$ であり，周期点は $\frac{2k}{5^N}$ ($k \neq 5$ の倍数)の形をしていることである。

このことの証明のためには，同じ有限小数から出発する $B(x)$ と $T(x)$ の軌道の関係を詳しく考察する必要があるが，それは省略させていただく。周期軌道が一つしかないことは，$x_0=0.a_0a_1\cdots a_{N-1}$ $(a_{N-1}\neq 0,5)$ を出発する $T(x)$ の軌道は，いずれは $\dfrac{2k}{5^N}$ ($k\neq 5$ の倍数)の形になり，これらは全部で $2\cdot 5^{N-1}$ あり，それが周期と一致することからわかる。

図 2F-1 は小数点以下 3 桁の二つの数から出発した $T(x)$ の二つの軌道を示すが，その周期点の部分は，平行移動によって重なるのである。なお，$N=3$ のとき，$2\cdot 5^{N-1}=50$ であり，$T(x)$ の 50 周期軌道は，2.2 節で述べたように全部で約 1.1×10^{15} もある。そのうちのただ一つのみが有限小数を初期値としているのである。

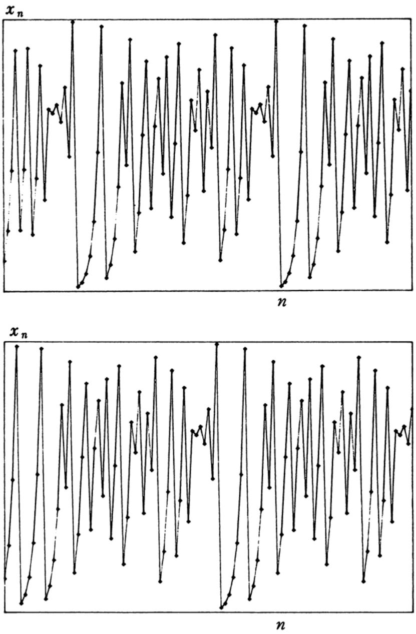


図 2F-1　テント写像の初期値 $x_0=0.111$ (上)，0.123 (下)のときの軌道 x_{100} までを示す。周期は 50 で，やがて同一の周期軌道になることがわかるであろう。

2G　デルタ関数

ディラック(P. A. M. Dirac)が考え出したデルタ関数 $\delta(x)$ は，連続な関数 $f(x)$ に対し

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0) \qquad (x_0 \in [a, b]) \qquad \text{(2G-1)}$$

が成立するもので，$\delta(x)$ の表わし方は，上の定義でもわかるとおり，$x=x_0$ にのみ値を有するものでなければならないし，また(2G-1)を満足するかぎり無数に存在する。例えば図 2G-1 のように，x_0 を中心に幅 ε，高さ $1/\varepsilon$ の矩形状の関数 $\delta_\varepsilon(x-x_0)$ を考え，$\varepsilon \to 0$ の極限をとればよい。$\delta_\varepsilon(x)$ に関しては，積分に関する中間値の定理より

$$\int_a^b f(x)\,\delta_\varepsilon(x-x_0)\,dx = f\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon\theta(\varepsilon)\right). \qquad \text{(2G-2)}$$

ここで，$0 \leqq \theta(\varepsilon) \leqq 1$，および $\left[x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset [a, b]$ である。

(2G-2)の右辺において $\varepsilon \to 0$ の極限をとれば，$f(x_0)$ となるので

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x-x_0) = \delta(x-x_0)$$

と書く。$f(x)=1$ にとれば

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\,dx = 1$$

となる。よく使われる $\delta(x)$ の表わし方として，指数関数や，三角関数を用いた

$$\delta(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2}, \qquad \delta(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin nx}{\pi x}$$

などがあるが，これらのいずれも $x=0$ で高さ無限大の関数値をもつものと考えられ，数学的な定義としては(2G-1)であるが，工学や物理学においてはそれ自身，種々の衝撃・パルスを理想化したものと考えられている。

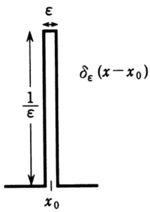


図 2G-1

また，形式的に部分積分を行い

$$\int_a^b f(x)\,\delta'(x-x_0)\,dx = \Big[f(x)\,\delta(x-x_0)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,\delta(x-x_0)\,dx$$
$$= -f'(x_0)$$

でデルタ関数の微分も表わすことができる。

さらに，4 章に登場する，ヘビサイド(Heaviside)関数

$$H(x-x_0) = \begin{cases} 0 & (x < x_0) \\ 1 & (x \geqq x_0) \end{cases}$$

は，

$$H(x-x_0) = \int^x \delta(x'-x_0)\,dx'$$

と表わすことができる。

3A　ロジスティック写像の 3 周期の窓の開始点

$L_R(x) = Rx(1-x)$ において

$$R = 1+\sqrt{8} = 3.828427125\cdots$$

が窓の始まりであることを示す。これは図 3A-1 のように $L_R^3(x)$ が 45° の直線と三点で接し，$L_R^3(x)-x=0$ が三つの重根をもつ場合である。この他に，根 $x=0$ と $L_R(x)-x=0$ の根 $x=1-\dfrac{1}{R}$ をもつことを利用して，次のように整理する。

$$\begin{aligned} L_R^3(x)-x = x(Rx+1-R)\{&R^6x^6-(3R^6+R^5)x^5 \\ &+(3R^6+4R^5+R^4)x^4-(R^6+5R^5+3R^4+R^3)x^3 \\ &+(2R^5+3R^4+3R^3+R^2)x^2-(R^4+2R^3+2R^2+R)x \\ &+(R^2+R+1)\} \end{aligned} \qquad (3A\text{-}1)$$

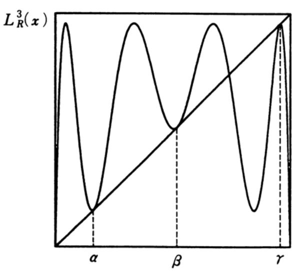


図 3A-1

ここで，{ } の中は三つの重根 α，β，γ を用いて

$$\{\quad\}=R^6(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2 \tag{3A-2}$$

と書けるはずである。

$$A=\alpha+\beta+\gamma,\qquad B=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\qquad C=\alpha\beta\gamma$$

とおくと

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2&=(x^3-Ax^2+Bx-C)^2\\&=x^6-2Ax^5+(A^2+2B)x^4-2(AB+C)x^3\\&\quad+(B^2+2AC)x^2-2BCx+C^2\end{aligned} \tag{3A-3}$$

となり，この式と(3A-1)を比較すると，次式を得る。

$$\begin{aligned}&A=\frac{3R+1}{2R},\\&A^2+2B=\frac{3R^2+4R+1}{R^2},\\&AB+C=\frac{R^3+5R^2+3R+1}{2R^3},\\&B^2+2AC=\frac{2R^3+3R^2+3R+1}{R^4},\\&BC=\frac{R^3+2R^2+2R+1}{2R^5},\\&C^2=\frac{R^2+R+1}{R^6}.\end{aligned} \tag{3A-4}$$

(3A-4)の上から順に三つの式で A, B, C が求まり

$$A=\frac{3R+1}{2R},\qquad B=\frac{(3R+1)(R+3)}{8R^2},\qquad C=\frac{-R^3+7R^2+5R+5}{16R^3} \tag{3A-5}$$

となる。これらを(3A-4)の 4 番目以降の式に代入し，整理すると

$$\begin{aligned}&\frac{(-3R^2+6R+5)(R^2-2R-7)}{64R^4}=0,\\&\frac{(3R^3-5R^2-7R-7)(R^2-2R-7)}{64R^5}=0,\\&\frac{(R^4-12R^3+22R^2+20R+33)(R^2-2R-7)}{256R^6}=0\end{aligned}$$

となり，$R^2-2R-7=0$ の根が共通根であり，$0<R\leqq 4$ より，$R=1+\sqrt{8}$ を得る。

A, B, C の値は

$$A=\frac{20+\sqrt{8}}{14}=\frac{10+\sqrt{2}}{7}=1.630601937\cdots,$$

$$B=\frac{13+16\sqrt{2}}{49}=0.7270901428\cdots,$$

$$C=\frac{41\sqrt{2}-31}{343}=0.07866693\cdots.$$

これを用いて3次方程式 $x^3-Ax^2+Bx-C=0$ を解くと

$$\alpha=0.1599288183\cdots,$$
$$\beta=0.5143552768\cdots,$$
$$\gamma=0.956317819\cdots$$

を得る。

3B　ニュートン法

ニュートン法とは，逐次近似法により方程式の根を求める方法で，n 番目の近似根を x_n とすると，x_{n+1} は直線

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

の $y=0$ の x の値として

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{(3B-1)}$$

として与えられる。

これは，書き方を変えれば関数 $f(x)$ を x_n のまわりでテイラー展開し，

$$f(x)=f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)+\cdots$$

x の1次までとったときの近似解 $f(x_{n+1})=0$ を求めたものに等しい。

以下に，$x^2-2=0$ の根をニュートン法で求めるプログラムを示す。もし，$f(x)=0$ の根を求めたければ，“100　Y=F(X)” を具体的に書き直せばよい。

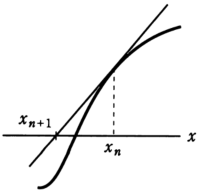


図 3B-1

```
10 INPUT "X0="; X
20 D = .0001
30 GOSUB 100: F = Y
40 X = X - D
50 GOSUB 100: G = Y
60 X = X + D
70 E = -D * F / (F - G): X = X + E
80 IF ABS(E) > .000001 THEN GOTO 30
90 PRINT X: END
100 Y = X ^ 2 - 2
110 RETURN
```

一つの応用として，ロジスティック写像の超安定 N 回周期軌道を与えるパラメター R（プログラム内では X）を求めるプログラムを記す。

```
10 INPUT "X0="; X
15 INPUT "N=";N
20 D = .0001
30 GOSUB 100: F = Y
40 X = X - D
50 GOSUB 100: G = Y
60 X = X + D
70 E = -D * F / (F - G): X = X + E
80 IF ABS(E) > .000001 THEN GOTO 30
90 PRINT X: END
100 V=1/2
102 FOR I=1 TO N
104 V=X*V*(1-V)
106 NEXT I
108 Y=V-1/2
110 RETURN
```

“X0”を適当に選び，$N=5$ を入れると，

$$3.73892\cdots,\quad 3.90571\cdots,\quad 3.99027\cdots$$

などが求まる。

昔，関数電卓のなかった時代に（若い読者には想像もつかないことであろうが），例えば，A の m 乗根 $\sqrt[m]{A}$ を筆算で求めるのに，次のような方法を用いた。これもニュートン法の応用である。

$f(x)=x^m-A$ とすると，$f'(x)=mx^{m-1}$. ゆえに，(3B-1) より

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n{}^m-A}{mx_n{}^{m-1}}=\frac{1}{m}\left\{(m-1)x_n+\frac{A}{x_n{}^{m-1}}\right\}.$$

例えば，$m=3$，$A=2$ の場合

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{2}{x_n{}^2}\right).$$

$x_1=1$ とすると，

$$x_2=1.3333\cdots,\qquad x_3=1.2643\cdots,\qquad x_4=1.2599\cdots$$

となる。正確な値は，$\sqrt[3]{2}=1.25992105\cdots$ である。

3C　位相的エントロピーの求め方

超安定周期に対しては，構造行列の方法† を用いる。図 3C-1 のようにロジスティック写像 $L_R(x)$ の超安定 4 周期点 $R=3.960270\cdots$ を例にとる。図のように区間 I_1, I_2, I_3 をとると

$$L_R(I_1)=I_2,\qquad L_R(I_2)=I_3,\qquad L_R(I_3)=I_1+I_2+I_3$$

であるので，次のような行列 M を考え，これを**構造行列**とよぶ：

$$\begin{pmatrix} L_R(I_1) \\ L_R(I_2) \\ L_R(I_3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

この M の最大固有値を $\lambda_{\max}$ とおくと

$$\lambda_{\max}=1.83928\cdots,\ 1.72208\cdots.$$

位相的エントロピー h は

$$h=\log\lambda_{\max}$$

で求められる。これと同じ方法により，図 3-18 に示した 5 周期の超安定周期軌道の $\lambda_{\max}$ は次のようになる：1.51287…，1.72208…，1.92756….

このように，超安定周期軌道より，位相的エントロピーを求める方法

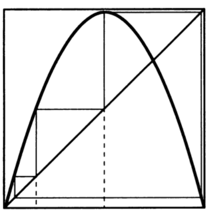


図 3C-1

---

† 詳しくは，“高橋陽一郎，区間力学系のカオスと周期点，都立大学数学教室セミナー報告” 参照

は，たとえその軌道が R に対して稠密に存在しても，実際上，限られた R に対してのみしか位相的エントロピーが求まらない。

以下に述べる**ニーディング列**(kneading sequence)による方法は，任意の R に対して求めることができる。

出発点を $x_0=\dfrac{1}{2}$ として，i 回写像を考え，

$$K_i=\begin{cases} R & \left(f^i\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}\right) \\ C & \left(f^i\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\right) \\ L & \left(f^i\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

として，ニーディング列

$$\boldsymbol{K}_N(f)=K_1K_2K_3\cdots K_N$$

をつくる。この K_i を用いて，ε_i を次のように定める：

$$\varepsilon_i=\begin{cases} +1 & (K_i=L) \\ -1 & (K_i=R) \end{cases}$$

また，繰り返しにより

$$\varepsilon_k=\prod_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i \qquad (K_k=C).$$

この ε_i を用い，τ の N 次多項式 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{K},N}(\tau)$ を定める：

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{K},N}(\tau)=1+\sum_{n=0}^{N}\left(\prod_{j=1}^{n}\varepsilon_j\right)\tau^n \tag{3C-1}$$

次に，方程式

$$\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{K},N}(\tau)=0 \tag{3C-2}$$

の正の最小解 τ が求まれば，位相的エントロピーは

$$h(f)=-\log\tau$$

で与えられる†。

実際には(3C-2)のように N を無限大にとるわけにもゆかず，(3C-1)において有限の N の場合の根を求めるのであるが，τ が小さい場合には，取る項数が少なくてすむ。τ が 1 に近い場合には，数十項を計算しても不

† P. Collet, J. P. Crutchfield and J. P. Eckmann: Computing the Topological Entropy of Mops, Commun. Math. Phys. **88**(1983)257. 及び，L. Block, J. Keesling, S. Li and K. Peterson: An Improved Algorithm for Computing Topological Entropy, J. Stat. Phys. **55**(1989)929

足である。次数の高い多項式の根の求め方は，ニュートン法よりもはさみうち法の方がすぐれている。

3D　不変測度の計算例

2章で述べた不変測度の例を，ロジスティック写像

$$x_{n+1}=Rx_n(1-x_n)$$

の R を変化させた場合の計算例に関して述べる。

不変測度 $\rho(x)$ は(2-12)で与えられ，初期値に依存して $\rho(x)$ の種類は一般に無限に存在するが，計算機シミュレーションで観測されるのは，最も多くの点にまたがる“自然な”不変測度である。これは2章，3章で示した写像の定常軌道に対応する測度である。比較のためロジスティック写像の軌道の図を示す。

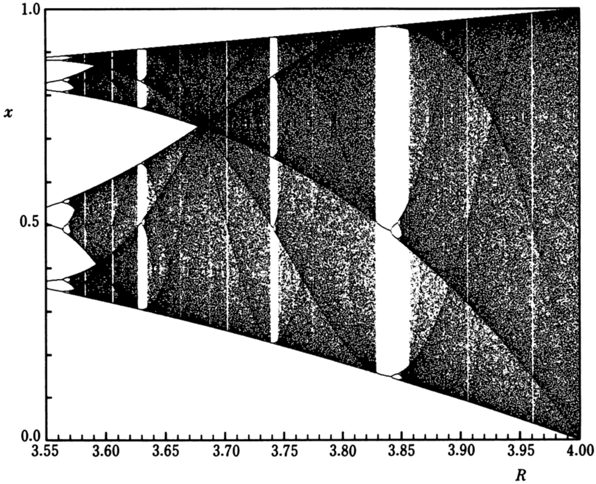


図 3D-1　ロジスティック写像の定常軌道

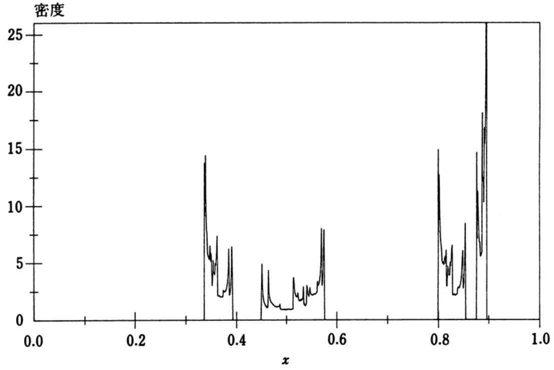


図 3D-2　$R=3.58$．カオスの始まる点 $R_{\infty}=3.5699456\cdots$ の直後の四つのバンド(帯)のカオス。以下いずれも 500 万回の写像で得られた不変測度で，縦軸は密度。

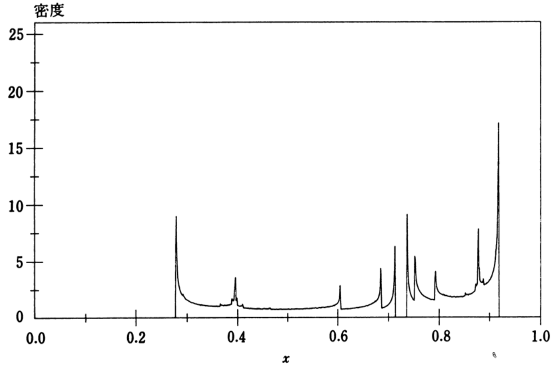


図 3D-3　$R=3.67$．二つのバンドのカオス。10 周期の窓の少し前の不変測度。10 周期の窓中の超安定軌道は $R=3.6730082\cdots$ にある。

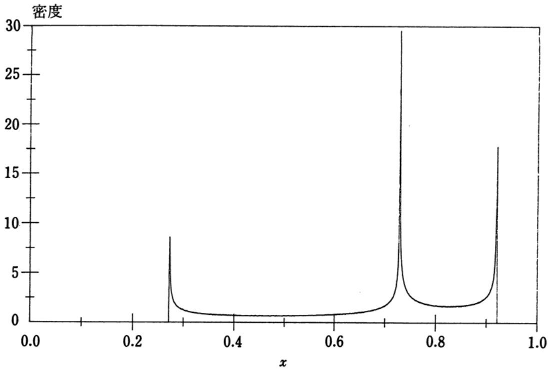


図 3D-4　$R=3.6786$. 二つのバンドが合体する場合の不変測度。正確には

$$R=\frac{2}{3}+\frac{16}{3\sqrt[3]{152+24\sqrt{33}}}+\frac{\sqrt[3]{152+24\sqrt{33}}}{3}=3.6785735\cdots.$$

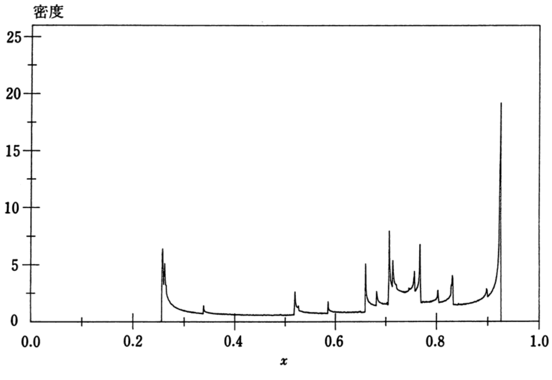


図 3D-5　$R=3.70$. 一つのバンドとなったカオス。

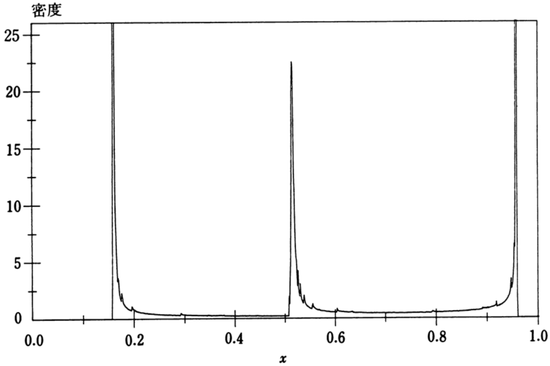


図 3D-6　$R=3.8283$. 3周期の窓の始まる点 $R=1+\sqrt{8}=3.8284271\cdots$ の直前の間欠性カオスを示す場合の不変測度。

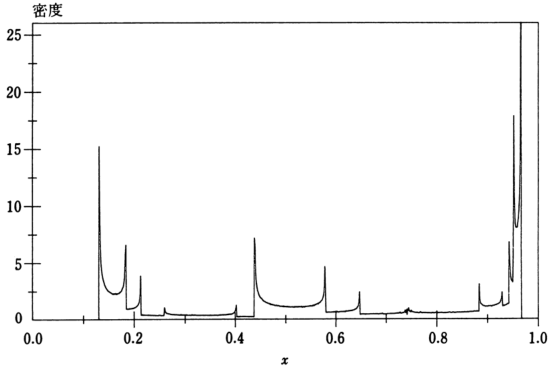


図 3D-7　$R=3.86$. 3周期の窓の後の不変測度。3周期の窓内で小さな3周期のカオスが成長したものの影響が見られる。

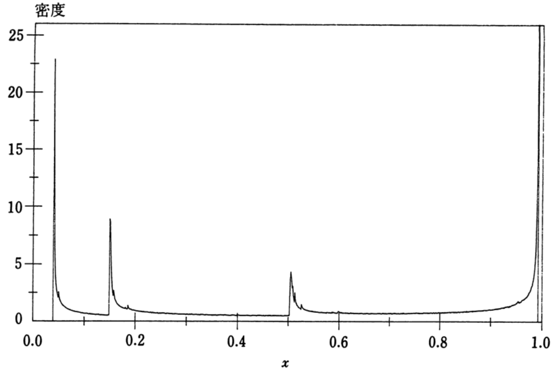


図 3D-8　$R=3.96$．4 周期の窓の手前の不変測度。4 周期の窓中の超安定軌道は，$R=3.960270127\cdots$ に存在する。

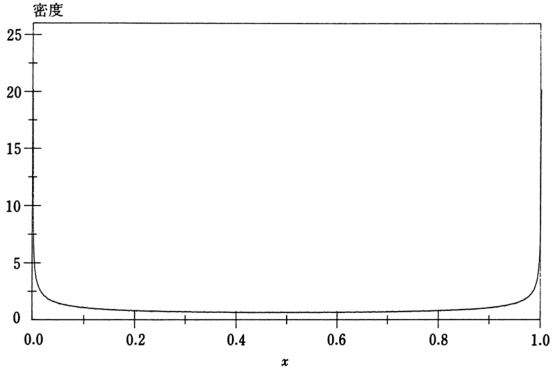


図 3D-9　$R=4$ におけるカオスの不変測度。2 章に述べたように $\rho(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ で与えられる。

4A　一般化次元 D_q の q に対する単調減少性

$$D_q=\frac{1}{q-1}\lim_{\ell\to 0}\frac{\log\sum_{i=1}^{n(\ell)}p_i{}^q}{\log \ell}=\lim_{\ell\to 0}\frac{\log\left(\sum_{i=0}^{n(\ell)}p_i{}^q\right)^{\frac{1}{q-1}}}{\log \ell}$$

において，$\log\ell<0$ であるので，$x=q-1$ とおいて

$$f(x)=\left(\sum p_i{}^{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

が x に関して単調増加であることを示せばよい。

次の絶対不等式を利用する。$p>q>0$，$a_i, b_i>0$ $(1\leqq i\leqq n)$ ならば

$$\left(\frac{a_1b_1{}^q+a_2b_2{}^q+\cdots+a_nb_n{}^q}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{\frac{1}{q}}\leqq\left(\frac{a_1b_1{}^p+a_2b_2{}^p+\cdots+a_nb_n{}^p}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4A-1}$$

である(ヘルダー(Hölder)不等式)。

ここで，$a_i=b_i=p_i$ とおけば，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ より

$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_i{}^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}p_i{}^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(p>q>0). \tag{4A-2}$$

これは $f(x)$ が $x>0$ で単調増加であることを示している。

次に $x<0$ の場合を考える。(4A-1)において $p^*=-p$，$q^*=-q$ とおくと，$p^*<q^*<0$ であり

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i{}^{-q^*}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{-\frac{1}{q^*}}\leqq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i{}^{-p^*}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{-\frac{1}{p^*}}$$

となる。上式より

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i{}^{-p^*}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\frac{1}{p^*}}\leqq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i{}^{-q^*}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\frac{1}{q^*}} \tag{4A-3}$$

この式で，$p^*, q^*, b_i{}^{-1}$ を各々 p, q, b_i と書けば，$p<q<0$，$a_i, b_i>0$ $(1\leqq i\leqq n)$ で

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i{}^{p}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i{}^{q}}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\frac{1}{q}}$$

となり，(4A-1)と同じ形の不等式が $p<q<0$ の場合も成立することがわ

かる。これより，$x<0$ の場合も $f(x)$ が単調増加であることがわかる。また，

$$\lim_{x\to 0}\log f(x)=\sum p_i \log p_i$$

であるから，

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)$$

である。

以上より，$-\infty<x<+\infty$ において $f(x)$ は単調増加関数である。

4B　鞍 点 法

実関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して次の形の積分を考える：

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-g(x)}\,dx$$

ただし，$g(x)$ は $x=x_0$ で極小であるとする。すなわち，

$$g'(x_0)=0,\qquad g''(x_0)>0.$$

$g(x)$ を x_0 のまわりでテイラー展開すると

$$g(x)=g(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2 g''(x_0)+\cdots.$$

上の積分を，展開の $(x-x_0)$ の 2 次までとったもので近似すると

$$I\fallingdotseq\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-\left\{g(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2 g''(x_0)\right\}}\,dx$$

$$=e^{-g(x_0)}\sqrt{\frac{2}{g''(x_0)}}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x_0+\sqrt{\frac{2}{g''(x_0)}}\xi\right)e^{-\xi^2}\,d\xi$$

ただし，$\xi=\sqrt{\dfrac{g''(x_0)}{2}}(x-x_0)$ である。

$e^{-\xi^2}$ は $|\xi|$ が大きくなると急速に小さくなり，$f(x_0+\sqrt{2}\,\xi)$ がこれに比べて十分ゆっくり変化すれば，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi=\sqrt{\pi}$$

の値を用いて

$$I\fallingdotseq\sqrt{\frac{2}{g''(x_0)}}f(x_0)\,e^{-g(x_0)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{g''(x_0)}}f(x_0)\,e^{-g(x_0)}$$

と近似的に求まる。

4C　二重振り子のカオス

4章に示したバネ付き振り子はカオスを示す系であるが，製作のしやすさと，カオスの観測の容易な点では以下に述べる二重振り子の方がすぐれている。実際に作った二重振り子を図 1-16 に示す。振り子の回転部分にベアリングを用い，支持をしっかりとして全体の振動が支持台に伝わるのを少なくすれば，振動が減衰してしまわないうちに，十分に不規則運動の様子を観察することができる。

この系の運動方程式は，バネ付き振り子(4-23)に比べてより複雑である。解析はラグランジュ関数を用いたほうが容易にできる。この方法に不慣れな読者は，適当な力学の教科書を参考にされたい。

図 4C-1 により，系の位置エネルギー P は

$$\begin{aligned} P &= m_1\ell_1 g(1-\cos\theta_1)+m_2\{\ell_1(1-\cos\theta_1)+\ell_2(1-\cos\theta_2)\}g \\ &= (m_1+m_2)\ell_1 g(1-\cos\theta_1)+\ell_2 g(1-\cos\theta_2) \end{aligned} \tag{4C-1}$$

となる。

また，運動エネルギー K を求めるには

$$x_1=\ell_1\sin\theta_1,\qquad y_1=\ell_1(1-\cos\theta_1)$$

$$x_2=\ell_1\sin\theta_1+\ell_2\sin\theta_2,\qquad y_2=\ell_1(1-\cos\theta_1)+\ell_2(1-\cos\theta_2)$$

とおき，

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1{}^2+\dot{y}_1{}^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2{}^2+\dot{y}_2{}^2) \\ &= \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2\{\ell_1^2\dot{\theta}_1^2+\ell_2^2\dot{\theta}_2^2+2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\} \end{aligned} \tag{4C-2}$$

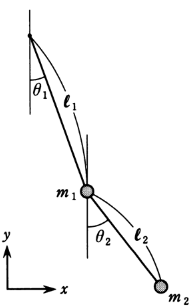


図 4C-1　二重振り子のパラメターと変数

と求まる。

ラグランジュ関数 $L=K-P$ をつくり，ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_1}=0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta_2}=0 \qquad (4C\text{-}3)$$

を具体的に求めると次のようになる：

$$\dot{\alpha}_1+\mu_2\ell_{21}\dot{\alpha}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\mu_2\ell_{21}\alpha_2{}^2\sin(\theta_1-\theta_2)+\omega_1{}^2\sin\theta_1=0$$
$$\ell_{21}\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\alpha_1{}^2\sin(\theta_1-\theta_2)+\omega_2{}^2\sin\theta_2=0 \qquad (4C\text{-}4)$$

ここで，$\alpha_1=\dot{\theta}_1$，$\alpha_2=\dot{\theta}_2$ であり，また，$\mu_2=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}$，$\ell_{21}=\dfrac{\ell_2}{\ell_1}$，$\omega_1{}^2=\dfrac{g}{\ell_1}$ である。

この方程式(4C-4)を，パソコンによりルンゲ・クッタ(Runge-Kutta)法によるプログラム，およびパソコンのディスプレイ上の結果を示す(図4C-2)。

BASIC プログラム(PC 98 用)を以下に示すが，プログラム中で運動方程式と対応するパラメターは，

L21 → ℓ_{21}，　MU2 → μ_2，　OMEGA1 → ω_1，　OMEGA2 → ω_2，
TH1 → θ_1，　TH2 → θ_2，　AL1 → α_1，　AL2 → α_2

である。

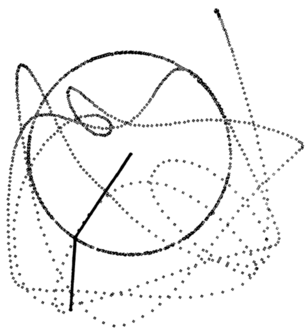


図 4C-2　二重振り子の運動のシミュレーション(次頁に掲載するプログラムによる)

ルンゲ・クッタ法によるプログラム

```
10 SCREEN 3:COLOR,0:CLS 3:CONSOLE 0,25,0,0:WIDTH 80,25
20 PI=3.14159:L21=1/SQR(2):MU2=.6:OMEGA1=1:OMEGA2=SQR(1/L21)*OMEGA1
30 RCX=400:RCY=180
40 LOCATE 0,0:PRINT "th1,th2":INPUT TH1,TH2
50 TH1=TH1*PI/180:TH2=TH2*PI/180
60 X1=SIN(TH1):Y1=-COS(TH1)
70 RX1=100*X1+RCX:RY1=RCY-100*Y1
80 LINE (RCX,RCY)-(RX1,RY1),2
90 CIRCLE (RX1,RY1),2,4
100 X2=SIN(TH1)+L21*SIN(TH2)
110 Y2=-COS(TH1)+L21*(-COS(TH2))
120 RX2=100*X2+RCX:RY2=RCY-100*Y2
130 LINE (RX2,RY2)-(RX1,RY1),2
140 CIRCLE (RX2,RY2),2,6
150 LOCATE 0,2:PRINT "v1,v2":INPUT AL1,AL2
160 AL1=AL1*PI/180:AL2=AL2*PI/180
170 H=.04
180 I=0
190 LOCATE 20,0 :PRINT "t="
200 DEF FND(A,B,C,D)=A*D-B*C
210 DEF FNM1(TH1,TH2,AL2)=-MU2*L21*SIN(TH1-TH2)*AL2^2-OMEGA1^2*SIN(TH1)
220 DEF FNM2(TH1,TH2,AL1)=1/L21*SIN(TH1-TH2)*AL1^2-OMEGA2^2*SIN(TH2)
230 DEF FNTH1(AL1)=AL1
240 DEF FNTH2(AL2)=AL2
250 DEF FNDENM(TH1,TH2)=1-MU2*(COS(TH1-TH2))^2
260 DEF FNAL1(TH1,TH2,AL1,AL2)=FND(FNM1(TH1,TH2,AL2),MU2*L21*COS(TH1-TH2),FNM2
```

```
270 DEF FNAL2(TH1,TH2,AL1,AL2)=FND(1,FNM1(TH1,TH2,AL2),1/L21*COS(TH1-TH2),FNM2
280 C1=H*FNTH1(AL1):D1=H*FNTH2(AL2):E1=H*FNAL1(TH1,TH2,AL1,AL2):F1=H*FNAL2(TH1
290 C2=H*FNTH1(AL1+E1/2):D2=H*FNTH2(AL2+F1/2):E2=H*FNAL1(TH1+C1/2,TH2+D1/2,AL1
F1/2)
300 C3=H*FNTH1(AL1+E2/2):D3=H*FNTH2(AL2+F2/2):E3=H*FNAL1(TH1+C2/2,TH2+D2/2,AL1
F2/2)
310 C4=H*FNTH1(AL1+E3):D4=H*FNTH2(AL2+F3):E4=H*FNAL1(TH1+C3,TH2+D3,AL1+E3,AL2+
320 DTH1=(C1+2*C2+2*C3+C4)/6:DTH2=(D1+2*D2+2*D3+D4)/6:TH1=DTH1+TH1:TH2=DTH2+TH
330 I=I+1
340 LOCATE 22,0:PRINT INT(I*H)
350 X1=SIN(TH1):X10=SIN(TH1-DTH1)
360 Y1=-COS(TH1):Y10=-COS(TH1-DTH1)
370 RX1=100*X1+RCX:RY1=RCY-100*Y1
380 RX10=100*X10+RCX:RY10=RCY-100*Y10
390 LINE (RCX,RCY)-(RX10,RY10),0
400 LINE (RCX,RCY)-(RX1,RY1),2
410 CIRCLE (RX1,RY1),1,4,,,,F,4
420 X2=SIN(TH1)+L21*SIN(TH2)
430 X20=SIN(TH1-DTH1)+L21*SIN(TH2-DTH2)
440 Y2=-COS(TH1)+L21*(-COS(TH2))
450 Y20=-COS(TH1-DTH1)+L21*(-COS(TH2-DTH2))
460 RX2=100*X2+RCX:RY2=RCY-100*Y2
470 RX20=100*X20+RCX:RY20=RCY-100*Y20
480 LINE (RX20,RY20)-(RX10,RY10),0
490 LINE (RX2,RY2)-(RX1,RY1),2
500 CIRCLE (RX2,RY2),1,6,,,,F,6
510 GOTO 280
520 END
```

入力の Th1，Th2 には度単位で，大きな値(120° 以上)を入れると，十分不規則な運動が観測される。V1，V2 は，初期角速度で単位は 度/時間である。この運動がカオスであることは，図 4C-3 のポアンカレ断面図を見ればわかる。

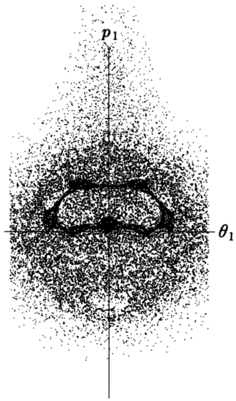


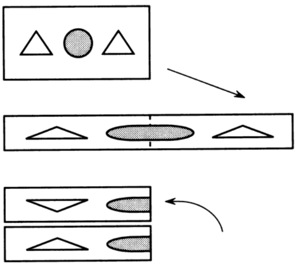
図 4C-3　二重振り子のポアンカレ断面図。空間(p_1, θ_1, θ_2)で $\theta_2=0$ の面を通る軌道による点。点のばらつきがカオスであることを示している。初期条件：$\theta_1=120°$，$\theta_2=150°$，$\dot{\theta}_1=0$，$\dot{\theta}_2=0$.

解　答

第 *1* 章

問 1　図 1-5 はテント写像，図 1-6 はロジスティック写像，図 1-7 はベルヌーイシフト.

問 2



問 3　$10^{-10}\times 2^{n}=1$ として $n=33.2\cdots$．33 桁目または 34 桁目

第 *2* 章

問 1　n 周期軌道の各々は n 個の n 周期点からなり，それらは他の周期軌道の点ではないので(なぜか？)，n 周期軌道の個数は $\dfrac{A(n)}{n}$ である。

問 2　13，15 を 2 進法で表わすと，13＝1101，15＝1111 である。$\dfrac{13}{15}$ をこれらの割算を実行して 2 進小数で求める。

```
           0.1101
1111)1101.0000
      111 1
      ---------
      101 10
       11 11
      ---------
        1 1100
          1111
        -------
          1101
```

この余りの 1101 は被除数と一致するので，後は同一の計算の繰返しになる。ゆえに，$0.\dot{1}10\dot{1}=\dfrac{13}{15}$．逆に，

$$0.\dot{1}10\dot{1}=0.\underbrace{1101}\,\underbrace{1101}\cdots=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$
$$=\frac{13}{16}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{16^2}+\cdots\right)=\frac{13}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{13}{15}$$

としてもよい。

次に，$\dfrac{13}{15}=0.\dot{1}10\dot{1}$ を出発する 2 進変換 B の 4 周期軌道は，B がずらしの変換であることから，$\{0.\dot{1}10\dot{1},\ 0.\dot{1}01\dot{1},\ 0.\dot{0}11\dot{1},\ 0.\dot{1}11\dot{0},\ 0.\dot{1}10\dot{1},\cdots\}$ となる。分数で表わせば $\left\{\dfrac{13}{15},\ \dfrac{11}{15},\ \dfrac{7}{15},\ \dfrac{14}{15},\ \dfrac{13}{15},\cdots\right\}$ となる。

問 3　$g'(x)=f'(f^{n-1}(x))f'(f^{n-2}(x))\cdots f'(f(x))f'(x)$ の x に x_0 を代入すると，$g'(x_0)=f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\cdots f'(x_1)f'(x_0)$．また，$x=x_k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ を代入すると，例えば，$k=1$ のときには，$g'(x_1)=f'(f^{n-1}(x_1))f'(f^{n-2}(x_1))\cdots f'(f(x_1))f(x_1)$ となるが，$f^{n-1}(x_1)=f^{n-1}(f(x_0))=f^n(x_0)=x_0$ (x_0 は f の n 周期点！)，$f^{n-2}(x_1)=f^{n-1}(x_0)=x_{n-1}$，$f^{n-3}(x_1)=f^{n-2}(x_0)=x_{n-2},\cdots$ であるから，$g'(x_1)=f'(x_0)f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\cdots f'(x_2)f'(x_1)$．同様にして，$g'(x_0)=g'(x_1)=\cdots=g'(x_{n-1})=f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_{n-1})$ となる。すなわち，f の n 周期軌道上の点 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ における $g(x)=f^n(x)$ の微分係数は等しい。

問 4　$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$，$g''(x)=f''(f(x))f'(x)^2+f'(f(x))f''(x)$ において，$x=x_0$ とすると，

$$g'(x_0)=f'(f(x_0))f'(x_0)=f'(x_0)^2=(-1)^2=1,$$
$$g''(x_0)=f''(f(x_0))f'(x_0)^2+f'(f(x_0))f''(x_0)$$
$$=f''(x_0)\cdot(f'(x_0)^2+f'(x_0))=f''(x_0)\cdot((-1)^2+(-1))=0.$$

問 5　$\alpha=\{I_n\}_n$ を I の開被覆とすると，$\bigcup_n I_n\supset I$．このとき，一般に，

$$f^{-1}\left(\bigcup_n I_n\right)=\bigcup_n f^{-1}(I_n)$$

が成り立つ(この事実は，任意の写像 f と任意濃度の集合の組について成り立つが，集合論の書物を参照)ことと，$f^{-1}(I)=I$ から，

$$f^{-1}\left(\bigcup_n I_n\right)=\bigcup_n f^{-1}(I_n)\supset f^{-1}(I)=I.$$

また，f が連続な写像であることと，I_n が開集合であることから，$f^{-1}(I_n)$ は開集合である。ゆえに，$f^{-1}\alpha$ は開被覆となる。

次に，$\alpha=\{I_n\}_n$，$\beta=\{J_m\}_m$ を I の開被覆とする。そのとき，$I_n\cap J_m$ は二つの開集合の共通部分として開集合であり，明らかに $\bigcup_{n,m}(I_n\cap J_m)\supset I$ であるから，$\alpha\vee\beta$ は開被覆である。

問 6　$$f^{-3}\alpha=\left\{\left[0,\frac{1}{8}\right],\ \left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right],\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right],\ \left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right],\ \left[\frac{5}{8},\frac{11}{16}\right],\ \left[\frac{11}{16},\frac{3}{4}\right],\ \left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right],\ \left[\frac{7}{8},1\right]\right\}$$

問 7　$\mathrm{lap}(f^n)=A\alpha^n+B\beta^n+C$ $(A>0,\ B>0,\ \alpha>1,\ \alpha>\beta>0)$ のとき，

$$\log \mathrm{lap}(f^n)=\log\left[A\alpha^n\left(1+\frac{B}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n+\frac{C}{A}\cdot\frac{1}{\alpha^n}\right)\right]$$

$$=n\log\alpha+\log A+\log\left(1+\frac{B}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n+\frac{C}{A}\cdot\frac{1}{\alpha^n}\right)$$

において，$n\to\infty$ のとき，$\log\left(\frac{B}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n+\frac{C}{A}\cdot\frac{1}{\alpha^n}\right)\to 0$ であるから，

$$h(f)=\log\alpha.$$

問 8　略

問 9　$x=0.x_1x_2\cdots$ を 2 進正規数，(a,b)を区間 $[0,1]$ に含まれる任意の開区間とする。$I_k{}^i$ を 2 進区間 $\left(\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right)$ $(0\leqq i\leqq 2^k-1,\ k\geqq 1)$ とすると，x が 2 進正規数であることから，$0\leqq i\leqq 2^k-1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N(x,I_k{}^i,n)=\frac{1}{2^k}$$

となる。ここで，$\frac{1}{2^k}=|I_k{}^i|$ である。まず，a,b が 2 進有理数のときには通分して，$a=\frac{i}{2^k}$，$b=\frac{j}{2^k}$ $(0\leqq i<j\leqq 2^k)$ と表わせ，2 進区間 $J=\left(\frac{i}{2^k},\frac{j}{2^k}\right)$ に対して，$N(x,J,n)=\sum_{\ell=i}^{j-1}N(x,I_k{}^\ell,n)$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N(x,J,n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=i}^{j-1}N(x,I_k{}^\ell,n)=\sum_{\ell=i}^{j-1}\frac{1}{2^k}=\frac{j-i}{2^k}=|J|.$$

一般の a，b の場合には，a,b を 2 進有理数で近似することにより，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}N(x,(a,b),n)=b-a.$$

問 10　（i）　$0\leqq y_n=\frac{2}{\pi}\theta_n\leqq\frac{1}{2}$ のとき，$y_{n+1}=2y_n=\frac{4}{\pi}\theta_n$ である．一方，$y_{n+1}=\frac{2}{\pi}\theta_{n+1}$ であるから，$\theta_{n+1}=2\theta_n$．また，$\theta_n=\sin^{-1}\sqrt{x_n}$ より $x_n=\sin^2\theta_n$ であるから，

$$x_{n+1}=\sin^2\theta_{n+1}=\sin^2 2\theta_n=4\sin^2\theta_n\cdot\cos^2\theta_n=4\sin^2\theta_n\cdot(1-\sin^2\theta_n)$$
$$=4x_n(1-x_n).$$

（ii）　$\frac{1}{2}\leqq y_n\leqq 1$ のとき，$y_{n+1}=2-2y_n=2-\frac{4}{\pi}\theta_n=\frac{2}{\pi}\theta_{n+1}$ であるから，$\theta_{n+1}=\frac{\pi}{2}\left(2-\frac{4}{\pi}\theta_n\right)=\pi-2\theta_n$．これから，

$$x_{n+1}=\sin^2\theta_{n+1}=\sin^2(\pi-2\theta_n)=\sin^2 2\theta_n=4x_n(1-x_n).$$

以上より，（i），（ii）どちらの場合でも，$x_{n+1}=4x_n(1-x_n)=L(x_n)$．

問 11　$x=\sin^2\frac{\pi}{2}y$ で二つの数列 y_n と x_n は結ばれている。ここで，$\frac{dx}{dy}=2\sin\frac{\pi}{2}y\cos\frac{\pi}{2}y\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\sin\pi y$ であるから，$\left|\frac{dx}{dy}\right|\leqq\frac{\pi}{2}$．これから，

$$|x'-x|=\left|\sin^2\frac{\pi}{2}y'-\sin^2\frac{\pi}{2}y\right|\leqq\frac{\pi}{2}\cdot|y'-y|.$$

ゆえに，数列 $\{y_n\}$ が $[0,1]$ で稠密ならば，対応する数列 $\{x_n\}$ も稠密であることがわかる。

問 12 $f(x)=T(x)=1-|2x-1|$，$\rho(x)=1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ のとき，$0\leqq y\leqq 1$ に対して，

$$I=\int\delta(y-f(x))\rho(x)\,dx=\int_0^{1/2}\delta(y-2x)\,dx+\int_{1/2}^1\delta(y-2+2x)\,dx$$

ここで，

$$\int_0^{1/2}\delta(y-2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\delta(y-u)\,du=\frac{1}{2}\qquad(u=2x)$$

$$\int_{1/2}^1\delta(y-2+2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\delta(y-u)\,du=\frac{1}{2}\qquad(u=-2x+2)$$

であるから$\left(\int\delta(y-u)\,du=\int\delta(u-y)\,du=1\text{ により}\right)$，

$$I=1=\rho(y).$$

$f(x)=4x(1-x)$，$\rho(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ $(0<x<1)$ のとき，$0<y<1$ に対して，

$$I=\int\delta(y-f(x))\rho(x)\,dx=\int_0^1\delta(y-4x(1-x))\frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

であるから，$4x(1-x)=u$ とおくと，

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{1/2}\delta(y-4x(1-x))\frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}+\int_{1/2}^1\delta(y-4x(1-x))\frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\\&=\int_0^1\delta(y-u)\cdot\frac{du}{2\pi\sqrt{u(1-u)}}+\int_0^1\delta(y-u)\frac{du}{2\pi\sqrt{u(1-u)}}\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^1\delta(y-u)\cdot\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\,du=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}=\rho(y).\end{aligned}$$

問 13 $I=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\log(\cos\theta)\,d\theta$ において，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ とおくと

$$I=\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^0\log(\sin\alpha)\,(-d\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log(\sin\alpha)\,d\alpha$$

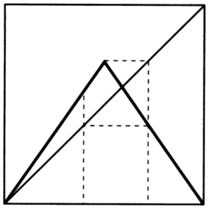
であるので

$$\begin{aligned}2I&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log(\cos\theta)\,d\theta+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log(\sin\theta)\,d\theta\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)d\theta\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log(\sin 2\theta)\,d\theta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\log 2)\;d\theta\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\{\log(\sin\theta')\}\cdot\frac{1}{2}d\theta'-\log 2=I-\log 2.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad I=-\log 2\qquad(\text{ただし，}\theta'=2\theta)$$

第 3 章

問 1　下図において，(0, 1)より出発した点は区間 $[2A(1-A), A]$ に必ず入り，かつ，ここより出られないことがわかる。



問 2　$|-R^2+2R+4|<1$ より，$(R^2-2R-5)(R^2-2R-3)<0$ であるから，$1-\sqrt{6}<R<-1$ および，$3<R<1+\sqrt{6}$ となる。R は $0<R\leqq 4$ の間で定義されているので，$3<R<1+\sqrt{6}$.

問 3　$L_R^4(x)-x$, $L_R^2(x)-x$, $L_R(x)-x$ は各々 x の 16 次，4 次，2 次の多項式であり，

$$L_R^4(x)-x=L_R^2(L_R^2(x))-x$$

であるので $L_R^2(x)=x$ とおくと 0 になり，因数定理より，$L_R^2(x)-x$ を因数にもつ。$L_R(x)-x$ の場合も同様。

問 4　(3-11)で $x=0$ より，

$$g(0)=-\alpha g[g(0)].$$

これを(3-9)で確かめてみる。$g(0)=1$，一方，

$$g(1)=1-1.52763+0.104815-0.0267057=-0.4495\cdots,$$
$$-\alpha g(1)\fallingdotseq -2.50\times(-0.45)\fallingdotseq 1.125$$

となり，$g(x)$ の展開の範囲内で大まかな一致は得られる。

問 5　$g\left(-\dfrac{x}{\alpha}\right)=1+A\dfrac{x^2}{\alpha^2}$ より，

$$-\alpha\left\{g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right)\right\}=-\alpha\left\{1+A\left(1+A\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^2\right\}=-\alpha\left\{1+A+2A^2\frac{x^2}{\alpha^2}+A^3\frac{x^4}{\alpha^4}\right\}$$

$$\therefore\quad 1+Ax^2=-\alpha(1+A)-2A^2\alpha\frac{x^2}{\alpha^2}-A^3\alpha\frac{x^4}{\alpha^4}$$

よって，$1=-\alpha(1+A)$，$A=-2A^2\dfrac{1}{\alpha}$. これらより，$2=-\alpha(2-\alpha)$.

$$\therefore\quad \alpha=1+\sqrt{3}=2.73\cdots.$$

問 6　$n=1$ の場合，$R_1<R<R_2$ に対し，(3-3)の前後で述べたように $x_{2\pm}$ の安定解計 2 個と，不安定解 x_0, x_- の計 2 個が存在する。

$R_{n-1}<R<R_n$ において，$L_R^{2^{n-1}}(x)=x$ の不動点が 2^n 個あり，このうち，2^{n-1} 個が写像 $L_R(x)$ の安定周期点で，残りの 2^{n-1} 個が不安定周期点であったとすると，$R=R_n$ において前者が不安定化し，代わりに $2^{n-1}\times 2=2^n$ 個の安定周期点と $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ 個の不安定周期点が生まれる。

問 7　$\dfrac{df^n(x)}{dx}=\dfrac{df^n(x)}{df^{n-1}(x)}\dfrac{df^{n-1}(x)}{dx}$,

$$\frac{d^2f^n(x)}{dx^2}=\frac{d^2f^n(x)}{d(f^{n-1}(x))^2}\left(\frac{df^{n-1}(x)}{dx}\right)^2+\frac{df^n(x)}{df^{n-1}(x)}\frac{d^2f^{n-1}(x)}{dx^2},$$

$$\frac{d^3f^n(x)}{dx^3}=\frac{d^3f^n(x)}{d(f^{n-1}(x))^3}\left(\frac{df^{n-1}(x)}{dx}\right)^3$$
$$+3\frac{d^2f^n(x)}{d(f^{n-1}(x))^2}\frac{df^{n-1}(x)}{dx}\frac{d^2f^{n-1}(x)}{dx^2}+\frac{df^n(x)}{df^{n-1}(x)}\frac{d^3f^{n-1}(x)}{dx^3}$$

これより，

$$S[f^n(x)]=\left(\frac{df^{n-1}(x)}{dx}\right)^2\frac{\dfrac{d^3f^n(x)}{d(f^{n-1}(x))^3}}{\dfrac{df^n(x)}{df^{n-1}(x)}}+3\frac{\dfrac{d^2f^n(x)}{d(f^{n-1}(x))^2}\dfrac{d^2f^{n-1}(x)}{dx^2}}{\dfrac{df^n(x)}{df^{n-1}(x)}}$$
$$+\frac{\dfrac{d^3f^{n-1}(x)}{dx^3}}{\dfrac{df^{n-1}(x)}{dx}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2f^n(x)}{d(f^{n-1}(x))^2}\dfrac{df^{n-1}(x)}{dx}}{\dfrac{df^n(x)}{df^{n-1}(x)}}+\frac{\dfrac{d^2f^{n-1}(x)}{dx^2}}{\dfrac{df^{n-1}(x)}{dx}}\right)^2$$
$$=\left(\frac{df^{n-1}(x)}{dx}\right)^2\left\{\frac{\dfrac{d^3f(f^{n-1}(x))}{d(f^{n-1}(x))^3}}{\dfrac{df(f^{n-1}(x))}{df^{n-1}(x)}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2f(f^{n-1}(x))}{d(f^{n-1}(x))^2}}{\dfrac{df(f^{n-1}(x))}{df^{n-1}(x)}}\right)^2\right\}$$
$$+\frac{\dfrac{d^3f^{n-1}(x)}{dx^3}}{\dfrac{df^{n-1}(x)}{dx}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2f^{n-1}(x)}{dx^2}}{\dfrac{df^{n-1}(x)}{dx}}\right)^2$$
$$=\left(\frac{df^{n-1}}{dx}\right)^2S[f]_{x=f^{n-1}(x)}+S[f^{n-1}]_{x=x}$$

問 8　(1)　$f'(x)=nx^{n-1}$，$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$，$f'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ より，

$$S[f]=\frac{n^2-1}{2x^2}\qquad (x\neq 0).$$

(2)　$x<\dfrac{1}{2}$ の場合，$f'(x)=2pA(1-2x)^{p-1}$，$f''(x)=-4p(p-1)A(1-2x)^{p-2}$，$f'''(x)=8p(p-1)(p-2)A(1-2x)^{p-3}$ より，

$$S[f]=-\frac{(p^2-1)}{(2x-1)^2}.$$

$S>\dfrac{1}{2}$ の場合も同じ結果を得る。

問 9　$-2\sqrt{f'}\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{f'}}\right)=-2\sqrt{f'}\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{f''}{\sqrt{(f')^3}}\right)=\sqrt{f'}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f''}{\sqrt{(f')^3}}\right)$

$$=\sqrt{f'}\frac{f'''(f')^{3/2}-\dfrac{3}{2}(f')^{1/2}(f'')^2}{(f')^3}$$

$$=\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2=S[f]$$

問 10　$f(x)=L_R^3(x)-x$ において，α，β，γ をその根とする。

$f'(x)=\dfrac{dL_R^3(x)}{dL_R^2(x)}\cdot\dfrac{dL_R^2(x)}{dL_R(x)}\cdot\dfrac{dL_R(x)}{dx}-1$ より，

$$f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=L_R'(\alpha)L_R'(\beta)L_R'(\gamma)-1$$

となり，$f'(\alpha)=0$ ならば，$f'(\beta)=0$，$f'(\gamma)=0$ となる。

問 11　$L_R^3\left(\dfrac{1}{2}\right)=R\cdot L_R^2\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(1-L_R^2\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

$$=R\cdot RL_R\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-L_R\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left\{1-RL_R\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-L_R\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\},$$

$L_R\left(\dfrac{1}{2}\right)=R\cdot\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{R}{4}$ であるので

$$L_R^3\left(\frac{1}{2}\right)=R^2\cdot\frac{R}{4}\left(1-\frac{R}{4}\right)\left\{1-R\cdot\frac{R}{4}\left(1-\frac{R}{4}\right)\right\}=\frac{1}{2}.$$

これを整頓すると

$$R^7-8R^6+16R^5+16R^4-64R^3+128=0.$$

問 12　$\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ に $p=3,5,11,23$ を代入して，各々，1, 3, 93, 182361 を得る。

問 13　(3-21)より，$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{ax^2+\varepsilon}=\int_{n_1}^{n_2}dn$．ここで，$x=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{a}}\tan\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{ax^2+\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}}d\theta.\qquad\therefore\quad\frac{1}{\sqrt{\varepsilon a}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta=\int_{n_1}^{n_2}dn$$

よって，(3-22)を得る。ただし，$\theta_1=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{a}{\varepsilon}}x_1$，$\theta_2=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{a}{\varepsilon}}x_2$ である。

問 14　付録 3 A の式を用いる．(3-29)は，

$$L_R^3(x)-x=x(Rx+1-R)R^6(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$$
$$=c_0(R)+c_1(x-\beta)+c_2(x-\beta)^2+\cdots$$

とおくと，明らかに，

$$c_0=0,\qquad c_1=0,\qquad c_2(R)=\beta(R\beta+1-R)R^6(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)^2$$

となる。

一方，(3-31)は $L_R^3(x)-x$ の極値の R に対する変化であるので

$$\frac{d}{dR}c_0(R)=\frac{d}{dR}(L_R^3(\beta)-\beta)=\frac{d}{dR}L_R^3(\beta)$$

$$=\frac{d}{dR}L_R^3(\beta)-\frac{7}{R}(L_R^3(\beta)-\beta)\qquad(*)$$

$$=\frac{1}{R}\{(2R+3)R^4\beta^2(\beta-1)^2+2R^6\beta^3(\beta-1)^3+4R^3\beta(\beta-1)+7\beta\}$$

$$=\frac{1}{R}\{(2R+3)R^2\gamma^2-2R^3\gamma^3-4R^2\gamma+7\beta\}$$

$$=\frac{1}{R}\{2R^3\gamma(1-\gamma)+3R^2\gamma(\gamma-1)-R^2\gamma+7\beta\}$$

$$=\frac{1}{R}(2R^2\alpha-3R\alpha-R^2\gamma+7\beta)=-\frac{\varepsilon}{d}$$

$\frac{\varepsilon}{d}$ の前のマイナス記号は，d を $R=R_c-d$ と定義したことによる。なお，(＊)の部分の計算は数式処理ソフトを用いパソコンで行った。

第 4 章

問 1 $E=\frac{1}{2m}y^2+\frac{1}{2}kx^2$ において

$$x=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t,$$
$$y=m\dot{x}=m\omega_0(-A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t).$$

この x, y を E の式へ代入し，$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ を用いると

$$E=\frac{k}{2}(A^2+B^2).$$

問 2 三角関数の合成を行い，$x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega_0 t+\delta)$.

一方，

$$y=m\dot{x}=m\omega_0\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega_0 t+\delta).$$

これは，楕円

$$\frac{x^2}{A^2+B^2}+\frac{y^2}{m^2\omega_0{}^2(A^2+B^2)}=1$$

を表わし，その面積 S は

$$S=\pi\sqrt{A^2+B^2}\cdot m\omega_0\sqrt{A^2+B^2}=\pi m\omega_0(A^2+B^2)$$

$$\therefore\quad \frac{E}{S}=\frac{k}{2\pi m\omega_0}=\frac{\omega_0}{2\pi}=V_0$$

問 3 x_1，x_2 を方程式(4-12)の基本解とする。

$$\ddot{x}_1+2r\dot{x}_1+\omega_0{}^2x_1=0 \quad \cdots\cdots①, \qquad \ddot{x}_2+2r\dot{x}_2+\omega_0{}^2x_2=0 \quad \cdots\cdots②$$

①×x_2−②×x_1 を計算して

$$\ddot{x}_1x_2-\ddot{x}_2x_1+2r(\dot{x}_1x_2-\dot{x}_2x_1)=0.$$

(4-11), (4-11)′ を用いて

$$\frac{d}{dt}W(x_1, x_2)+2rW(x_1, x_2)=0.$$

これを解いて

$$W(x_1, x_2)=W_0e^{-2rt}.$$

問 4 $x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$，$y=\dot{x}=-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t$ に対して，

$$A=\frac{\begin{vmatrix} x & \sin\omega t \\ y & \omega\cos\omega t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{vmatrix}}=\frac{1}{\omega}(x\omega\cos\omega t-y\sin\omega t),$$

$$B=\frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \cos\omega t & x \\ -\omega\sin\omega t & y \end{vmatrix}=\frac{1}{\omega}(y\cos\omega t+x\,\omega\sin\omega t).$$

$\dfrac{\partial\dot{x}}{\partial x}=\dfrac{\partial\dot{x}}{\partial A}\dfrac{\partial A}{\partial x}+\dfrac{\partial\dot{x}}{\partial B}\dfrac{\partial B}{\partial x}$ であるから，

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial A}=-\omega\sin\omega t,\qquad \frac{\partial A}{\partial x}=\cos\omega t$$

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial B}=\omega\cos\omega t,\qquad \frac{\partial B}{\partial x}=\sin\omega t$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\dot{x}}{\partial x}=-\omega\sin\omega t\cos\omega t+\omega\cos\omega t\sin\omega t=0$$

次に，$\dfrac{\partial\dot{y}}{\partial y}=\dfrac{\partial\dot{y}}{\partial A}\dfrac{\partial A}{\partial y}+\dfrac{\partial\dot{y}}{\partial B}\dfrac{\partial B}{\partial y}$ であるから，

$$\dot{y}=-\omega^2A\cos\omega t-\omega^2B\sin\omega t$$

に対して，

$$\frac{\partial\dot{y}}{\partial A}=-\omega^2\cos\omega t,\qquad \frac{\partial A}{\partial y}=-\frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

$$\frac{\partial\dot{y}}{\partial B}=-\omega^2\sin\omega t,\qquad \frac{\partial B}{\partial y}=\frac{1}{\omega}\cos\omega t$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\dot{y}}{\partial y}=(-\omega^2\cos\omega t)\left(-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)+(-\omega^2\sin\omega t)\left(\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right)=0$$

ゆえに，$\dfrac{\dot{S}}{S}=\dfrac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\dfrac{\partial\dot{y}}{\partial y}$ より $\dot{S}(t)=0$.

問 5　$ma_r=F_r=mg\cos\theta-kx$，$ma_\theta=F_\theta=-mg\sin\theta$，$r=\ell+x$，$\dot{r}=\dot{x}$，$\ddot{r}=\ddot{x}$ より，

$$m(\ddot{x}-(\ell+x)\dot{\theta}^2)=mg\cos\theta-kx,$$

$$m((\ell+x)\ddot{\theta}+2\dot{x}\dot{\theta})=-mg\sin\theta.$$

よって，(4-23)を得る。

問 6　(4-26)を具体的に計算すると

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{y}{m},$$

$$\dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{m}\frac{\alpha^2}{(\ell+x)^3}+mg\cos\theta-kx$$

$$=m(\ell+x)\dot{\theta}^2+mg\cos\theta-kx,$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial\alpha}=\frac{1}{m}\frac{\alpha}{(\ell+x)^2}=\dot{\theta},$$

$$\dot{\alpha}=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=-mg(\ell+x)\sin\theta.$$

これより，

$$2m(\ell+x)\dot{x}\dot{\theta}+m(\ell+x)^2\ddot{\theta}=-mg(\ell+x)\sin\theta,$$
$$(\ell+x)\ddot{\theta}+2\dot{x}\dot{\theta}=-g\sin\theta$$

を得る。よって，(4-26)の与えるものは二つの恒等式と運動方程式(4-23)である。一方，上式より

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}=\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}=\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial\theta}=\frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\alpha}=0. \qquad \therefore\ \frac{\dot{V}}{V}=0$$

問 7 方程式(4-12)の解を $x=e^{\lambda t}$ とおくと

$$\lambda^2+2r\lambda+\omega_0{}^2=0 \qquad \cdots\cdots①$$

となる。この根を λ_1，λ_2 とおく．$\lambda_1\neq\lambda_2$ の場合を考えてよいから，一般解は A，B を定数として

$$x(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t} \qquad \cdots\cdots②$$

と書ける。これより

$$\dot{x}(t)=A\lambda_1 e^{\lambda_1 t}+B\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \cdots\cdots③$$

となる。

$$x(t+\tau)=Ae^{\lambda_1(t+\tau)}+Be^{\lambda_2(t+\tau)}$$
$$=Ae^{\lambda_1 t}e^{\lambda_1\tau}+Be^{\lambda_2 t}e^{\lambda_2\tau} \qquad \cdots\cdots④$$

②，③より，$Ae^{\lambda_1 t}, Be^{\lambda_2 t}$ を求めると

$$Ae^{\lambda_1 t}=\frac{\lambda_2 x(t)-\dot{x}(t)}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad Be^{\lambda_2 t}=\frac{\dot{x}(t)-\lambda_1 x(t)}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

これを④へ代入し，整理すると，

$$x(t+\tau)=\frac{\lambda_1 e^{\lambda_2\tau}-\lambda_2 e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_1-\lambda_2}x(t)+\frac{e^{\lambda_1\tau}-e^{\lambda_2\tau}}{\lambda_1-\lambda_2}\dot{x}(t).$$

①より，$\lambda_1=-r+i\tilde{\omega}$，$\lambda_2=-r-i\tilde{\omega}$ であるから，答を得る。

別解としては $x(t)=Ce^{-rt}\sin(\tilde{\omega}t+\delta)$ を用いて，直接証明する。

問 8 辺の長さ ℓ，m の長方形を考える。これを一辺 ε の正方形で覆うと，最も効率のよい覆い方は，図 4-20 のように互いに接している場合である。正方形の直径は $\sqrt{2}\,\varepsilon$ であり，全個数は $\left(\left[\frac{\ell}{\varepsilon}\right]+1\right)\left(\left[\frac{m}{\varepsilon}\right]+1\right)\fallingdotseq\frac{\ell m}{\varepsilon^2}$ である。よって

$$\inf\sum_k \varepsilon_k{}^\alpha=\frac{\ell m}{\varepsilon^2}(\sqrt{2}\,\varepsilon)^\alpha=2^{\alpha/2}\ell m\varepsilon^{\alpha-2}.$$

$\varepsilon\to 0$ のとき，$\alpha=2$ ならばこの値は有限確定で $2\ell m$ となる。よって，ハウスドルフ次元 D_0 は 2 である。直方体の場合もまったく同様にして，ハウスドルフ次元が 3 であることがわかる。

問 9 L_0 においては，$\varepsilon=\ell$，$n(\varepsilon)=1$； L_1 においては，$\varepsilon=\frac{\ell}{2}$，$n(\varepsilon)=4$； L_2 においては，$\varepsilon=\frac{\ell}{4}$，$n(\varepsilon)=16$ より，L_n においては，$\varepsilon=\frac{\ell}{2^n}$，$n(\varepsilon)=2^{2n}$ であることがわかる。

$$\therefore\quad D_{\rm ca}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log n(\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^{2n}}{\log\frac{\ell}{2^n}}=2$$

問 10　$D_q=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\log\varepsilon}\left.\frac{\frac{d}{dq}\left(\log\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}p_i{}^q\right)}{\frac{d}{dq}(q-1)}\right|_{q=1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\log\varepsilon}\left.\frac{\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}(\log p_i)p_i{}^q}{\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}p_i{}^q}\right|_{q=1}$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}(\log p_i)p_i}{\log\varepsilon}$$

問 11　C_2の段階で計算する。(4-33)において $n(\varepsilon)=3$, $\varepsilon=\frac{1}{3}$である。$p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=0$, $p_3=\frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{q-1}\frac{\log\left(2\times\left(\frac{1}{2}\right)^q\right)}{\log\frac{1}{3}}=\frac{\log 2}{\log 3}$$

となる。C_3の段階では $n(\varepsilon)=9=3^2$, $\varepsilon=\frac{1}{3^2}$ である。$p_1=p_3=p_7=p_9=\frac{1}{2^2}$ より,

$$\frac{1}{q-1}\frac{\log\left(2^2\left(\frac{1}{2^2}\right)^q\right)}{\log\frac{1}{3^2}}=\frac{\log 2}{\log 3}.$$

以下, C_∞まで同じ値となり, $D_q=\frac{\log 2}{\log 3}$.

問 12　$f(x)=\log x$ $(x>0)$, $a_i=x_i=p_i$ $(i=1,2,\cdots,n(\varepsilon))$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}p_i\log p_i\leqq\log\left(\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}p_i{}^2\right).$$

これより, $D_2\leqq D_1$ を得る。

一方, $f(x)=-x\log x$ $(0<x\leqq 1)$, $a_i=\frac{1}{n(\varepsilon)}$, $x_i=p_i$ $(i=1,2,\cdots,n(\varepsilon))$ より

$$\sum p_i\log p_i\geqq -\log n(\varepsilon)$$

となり, $D_1\leqq D_0$ を得る。

問 13　$p^{(n)}=p^n=(\ell_1{}^m\ell_2{}^{n-m})^\alpha$　$(m=0,1,2,\cdots,n)$

これより,

$$\alpha=\frac{n\log p}{m\log\ell_1+(n-m)\log\ell_2}=\frac{\log p}{X\log\ell_1+(1-X)\log\ell_2}.$$

一方,

$$N=(\ell_1{}^m\ell_2{}^{n-m})^{-f(\alpha)}\fallingdotseq\frac{n^n}{m^m(n-m)^{n-m}}.$$

これより,

$$-f(\alpha)=\frac{n\log n-m\log m-(n-m)\log(n-m)}{m\log\ell_1+(n-m)\log\ell_2}.$$

$$\therefore\quad f(\alpha)=\frac{X\log X+(1-X)\log(1-X)}{X\log\ell_1+(1-X)\log\ell_2}$$

$p=\frac{1}{2}$, $\ell_1=\frac{1}{4}$, $\ell_2=\frac{1}{2}$ より

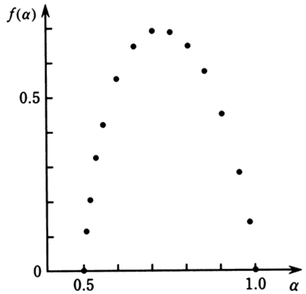
$$\alpha=\frac{-\log 2}{-2X\log 2-(1-X)\log 2}=\frac{1}{1+X},$$

$$f(\alpha)=\frac{X\log X+(1-X)\log(1-X)}{-2X\log 2-(1-X)\log 2}$$

$$=-\frac{1}{\log 2}\frac{X\log X+(1-X)\log(1-X)}{1+X}$$

$$=-\frac{1}{\log 2}\{(1-\alpha)\log(1-\alpha)+(2\alpha-1)\log(2\alpha-1)-\alpha\log\alpha\}.$$

α と $f(\alpha)$ の関係の概要をプロットすると図のようになる。



問 14　(4-71)より

$$(q-1)D_q=q\alpha(q)-f(\alpha(q)),$$

$$\frac{d}{dq}[(q-1)D_q]=\alpha(q)+q\frac{d\alpha(q)}{dq}-\frac{d\alpha(q)}{dq}f'(\alpha(q)).$$

(4-70)より，$f'(\alpha(q))=q$ であるから，結果を得る。

問 15　$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx=\int_0^\infty e^{-x+n\log x}\,dx$

$g(x)=x-n\log x$ とおくと，

$$g'(x)=1-\frac{n}{x},\qquad g''(x)=\frac{n}{x^2}.$$

$g'(x)=0$ より，$x_0=n$ となる．このまわりでテイラー展開して

$$g(x)=n-n\log n+\frac{1}{2!}\frac{1}{n}(x-n)^2+\cdots.$$

よって，付録 4B の式

$$I\fallingdotseq\sqrt{\frac{2\pi}{g''(x_0)}}f(x_0)e^{-g(x_0)}$$

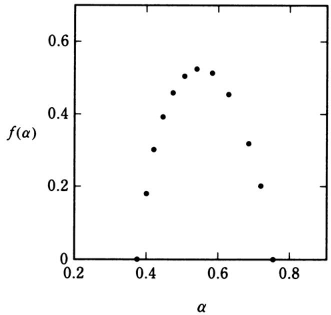
において，$f(x_0)\equiv 1$ とおくと

$$I=\sqrt{2\pi n}\,e^{-(n-n\log n)}\fallingdotseq\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

を得る。ちなみにこの式は，$n=1$ で，$I=0.922\cdots$ $(1!=1)$，$n=10$ で，$I=3598695.6$ $(10!=3628800)$ となり，相対誤差は約 $\dfrac{1}{12n}$ となる。

問 16 $\alpha=\dfrac{\log p}{X\log \ell_1+(1-X)\log \ell_2}$，$f(\alpha)=\dfrac{X\log X+(1-X)\log(1-X)}{X\log \ell_1+(1-X)\log \ell_2}$.

$p=\dfrac{1}{2}$，$\ell_1=\dfrac{1}{\alpha_{\mathrm{PD}}}$，$\ell_2=\dfrac{1}{\alpha_{\mathrm{PD}}{}^2}$，$\alpha_{\mathrm{PD}}=2.502807876\cdots$ としてグラフを描くと，図のようになる。図 4-35 と比べられたい。



索　引

著者略歴

長島弘幸（ながしま ひろゆき）

1941年　神奈川県に生まれる
1970年　東京大学大学院理学系研究科
　　　　博士課程修了（物理学専攻）
現　在　静岡大学教養部教授

馬場良和（ばば よしかず）

1935年　群馬県に生まれる
1965年　京都大学大学院理学研究科
　　　　修士課程修了（数学専攻）
現　在　静岡大学教養部教授

1992年 7月10日　初　版　発　行

カオス入門
—現象の解析と数理—

著　者　長島弘幸
　　　　馬場良和
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培　風　館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話(03)3262-5256(代表)・振替 東京4-44725

中央印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-02200-4 C3042